¿Cuál fue el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM?

María José Bernal Vélez

Asesor

Marta Lucía Franco Arcila

Licenciada en Física y Matemática. Especialista en didáctica de la ciencia con énfasis en física y matemática.

Colegio Marymount

Medellín

Proyecto de Grado

2020

Tabla de contenido

Lista de figuras 5

Resumen 8

Abstract 9

Introducción 10

Justificación 12

Pregunta de investigación 14

Objetivos 14

Objetivo general 14

Objetivos específicos 14

Marco conceptual 15

1 Contexto histórico 15

1.1 Línea del tiempo 15

1.1.1 Pitágoras: 572-500 a.C. 15

1.1.2 Euclides: 365-300 a.C. 16

1.1.3 Pingala: 200 a. C. 16

1.1.4 Acarya Virahanka: 600-800. 17

1.1.5 Jema Chandra: 1089-1172 o 1173. 17

1.1.6 Leonardo de Pisa (Fibonacci): 1175-1240. 18

1.1.7 Narayan Pandit: 1340-1400. 18

1.1.8 Pierre De Fermat: 1601-1665 19

1.1.9 Blaise Pascal: 1623-1662. 19

1.1.10 Gottfried Wilhelm Leibniz: 1646-1716. 19

1.1.11 Leonhard Euler: 1707-1783. 20

1.2 Leonardo de Pisa 21

1.2.1 Liber abaci 22

2 Sucesión de Fibonacci 23

2.1 Propiedades 24

2.2 Espiral de Fibonacci 26

2.3 Aplicaciones 27

2.3.1 Los números de Fibonacci y el número de oro. 27

2.3.2 En la matemática. 28

2.3.3 En la naturaleza. 28

2.3.4 En el cuerpo humano. 31

2.3.5 En las creaciones humanas 33

3 Teoría de números 36

3.1 Surgimiento 36

3.2 ¿Qué estudia? 37

3.2.1 Divisibilidad. 37

3.2.2 Congruencias. 37

3.2.3 Propiedades de los números primos. 38

3.2.4 Ley de la reciprocidad cuadrática. 38

3.2.5 Teorema de factorización única 38

3.2.6 Números perfectos. 38

4 Metodología *40*

4.1 La investigación cuantitativa 40

4.2 La investigación explicativa 40

4.3 Instrumento 41

4.4 Población y muestra 44

Análisis *45*

Conclusiones *52*

Referencias *56*

Anexos *65*

Anexo 1. Enlace video 65

Anexo 2. Formato del cuestionario. 66

Anexo 3. Resultados cuestionario. 71

Lista de figuras

Figura 1: Diagrama de la reproducción de conejos enunciada por Fibonacci. Tomada de: https://sites.google.com/site/deptmatiesao/biografias/fibonacci.. 23

Figura 2: Espiral de Fibonacci. Tomada de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34465088/GACETARSME_2002_05_1_03.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DEL_DIABLO_DE_LOS_UMEROS_Seccion_a_cargo.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz 26

Figura 3: Triángulo de Pascal y sucesión de Fibonacci. Tomado de: https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/FibonacciFinal2.pdf.. 28

Figura 4: Concha del Nautilus. Tomada de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53430029/MP430-Trabajo01-LaSucesionDeFibonacci.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DESCUELA_BIBLICA_ESCRITURAS_ONLINE.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA25 29

Figura 5: Números de Fibonacci en el girasol. Tomada de: https://www.eldefinido.cl/actualidad/plazapublica/7723/El-numero-de-oro-Que-es-donde-esta-y-para-que-sirve/ 30

Figura 6: contorno de un huracán y sucesión de Fibonacci. Tomada de: https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Gonzalez118/publication/333602685_Workshop_Leonardo_de_Pisa_Fibonacci_or_The_mathematical_awakening_of_the_Western_European_Medieval_Culture/links/5cf6366d299bf1fb18563d8... 30

Figura 7: Contorno de una galaxia y sucesión de Fibonacci. Tomada de:
https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Gonzalez118/publication/333602685_Workshop_Leonardo_de_Pisa_Fibonacci_or_The_mathematical_awakening_of_the_Western_European_Medieval_Culture/links/5cf6366d299bf1fb18563d 31

Figura 8: mano humana y sucesión de Fibonacci. Tomada de:
https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53430029/MP430-Trabajo01-LaSucesionDeFibonacci.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DESCUELA_BIBLICA_ESCRITURAS_ONLINE.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz- 32

Figura 9: Oreja y sucesión de Fibonacci. Tomada de: http://wordpress.colegio-arcangel.com/investigandoconciencias/el-numero-aureo/ 33

Figura 10: Espiral de Fibonacci en la Gioconda. Tomada de:
http://dspace.udla.edu.ec/bitstream/33000/6046/1/UDLA-EC-TOD-2016-86.pdf 34

Figura 11: sucesión de Fibonacci en el piano. Tomada de:
https://en.calameo.com/read/00530653664c84b3a4f25 34

Figura 12: Partenón griego. Tomada de:
http://132.248.204.81/nano/index.php/nano/article/view/52236/46532 35

Figura 13: Tarjetas de crédito y sucesión de Fibonacci. Tomada de:
https://neuromarketing.la/2015/12/el-numero-de-oro-y-su-influencia-en-el-marketing/ 35

Figura 14: triángulo de Pascal. Tomada de:
https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html 42

Figura 15: Espiral de Fibonacci. Tomada de: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html 43

Figura 16: Propiedad máximo común divisor. Tomada de: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html 44

Figura 17: Gráfica resultados pregunta 1. Fuente: elaboración propia, 2020. 46

Figura 18: Gráfica resultados pregunta 2. Fuente: elaboración propia, 2020. 47

Figura 19: Gráfica resultados pregunta 3. Fuente: elaboración propia, 2020. 48

Figura 20: Gráfica resultados pregunta 4. Fuente: elaboración propia, 2020. 49

Figura 21: Gráfica resultados pregunta 5. Fuente: elaboración propia, 2020. 50

Figura 22: Gráfica distribución total de resultados. Fuente: elaboración propia, 2020. 51

Resumen

La sucesión de Fibonacci es una serie muy sencilla que fue enunciada por Leonardo de Pisa, un matemático Italiano del siglo XII que tuvo grandes aportes en la teoría de números, rama de la matemática que estudia los números enteros y sus propiedades, pues introdujo los números que utilizamos actualmente y las operaciones básicas entre estos. A pesar de ser tan sencilla, esta sucesión trae consigo muchas propiedades y aplicaciones en nuestra vida diaria, ya que, más allá de que puede ser encontrada en la matemática, como en el triángulo de Pascal, se puede ver en la naturaleza, en el cuerpo humano y en las creaciones humanas, incluyendo la organización de las semillas de algunas plantas (como los girasoles), el contorno de las galaxias y los huracanes, las medidas de las falanges de las manos, la belleza del ser humano, el Partenón griego, y la Gioconda. Sin embargo, muchas personas no conocen la sucesión ni su gran importancia al explicar muchos de los fenómenos que se presencian diariamente, por lo que se pretende que un mayor número de sujetos tengan conocimiento de esta. Por esto, en el presente trabajo se presentan los conceptos básicos de esta sucesión y de la teoría de números, con el objetivo de lograr exponer los aportes de la serie en esta rama de la matemática. Por otro lado, también se establecerá si esta sucesión puede ayudar en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM, a través del estudio con cuestionarios aplicados a las estudiantes de noveno y décimo grado del Colegio Marymount, donde deberán utilizar el conocimiento de la serie de Fibonacci, explicada a partir de un video, y sus conocimientos básicos de la matemática.

Palabras clave: Sucesión de Fibonacci, teoría de números, problemas creativos y sencillos, áreas STEM.

Abstract

The Fibonacci sequence is a very simple series that was stated by Leonardo of Pisa, a Greek mathematician of the 12th century that made great contributions in the number theory, consisting of the branch of mathematics that studies whole numbers and their properties, as he introduced the numbers that we currently use and the basic operations with these. Despite being a very simple progression, it has many properties and applications in our daily lives because it can be seen not only in mathematics, such as in the Pascal's Triangle, but also in nature, in the human body, and in human creations, including the organization of the seeds of some plants (like sunflowers), the outline of galaxies and hurricanes, the measure of our hands' phalanges, the beauty of human beings, the Greek Parthenon, and the Mona Lisa. However, many people don't have any knowledge about this sequence or its importance when explaining many of the phenomena that we witness daily. Moreover, this project pretends that a greater variety of individuals acquire knowledge of it. Because of this, the present work exhibits the basic concepts of the Fibonacci Sequence and the number theory with the objective of revealing the contributions of this progression in this division of mathematics. On the other hand, it will also be established if this succession can help in the solution of creative and simple problems in the STEM areas by using questionnaires applied to ninth and tenth grade students of Marymount School, where they will need to use the knowledge they gained on this sequence (explained through a video) and their basic knowledge of mathematics.

Keywords: Fibonacci Sequence, number theory, creative and simple problems, STEM fields.

Introducción

En este trabajo se podrá encontrar una investigación sobre la sucesión de Fibonacci, la teoría de números y la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM. El objetivo general de este trabajo es exponer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM.

Para comenzar, se plantearán los objetivos, general y específicos, de la investigación. Luego, se expondrá un marco conceptual, donde se incluirán los términos necesarios, comenzando con una breve historia de la matemática, especialmente los matemáticos más importantes que han estudiado e influenciado la teoría de números, incluyendo a Leonardo de Pisa; siguiendo con la sucesión de Fibonacci, su descubrimiento, bases, propiedades, y aplicaciones (matemática, naturaleza, cuerpo humano y creaciones humanas); y finalmente la teoría de números, explicando qué es, su surgimiento y algunos de los temas que estudia.

Más adelante, se trazará una metodología cuantitativa y explicativa que pretende aplicar problemas creativos y sencillos de las áreas STEM. Para realizar esto, se organizará un cuestionario corto con este tipo de problemas que será resuelto por las estudiantes de noveno y décimo grado del Colegio Marymount de Medellín, y así, analizar como el conocimiento de la sucesión de Fibonacci puede ayudar a las alumnas a contestar el cuestionario correctamente. En estos, las estudiantes no solo deberán tener conocimiento sobre la sucesión (que se compartirá a través de un video), sino que también deben aplicar sus conocimientos básicos sobre la matemática para resolverlo correctamente.

Para finalizar, la última sección del proyecto de investigación está compuesta por el análisis de la información obtenida y las conclusiones del trabajo. En el análisis, se presentarán los resultados de los cuestionarios realizados por las estudiantes de noveno y décimo grado, realizando la triangulación de la información presentada en el marco conceptual y los resultados, y utilizando gráficas para mostrar esto. Por último, se expondrán las conclusiones finales de la investigación, que dan respuesta a la pregunta de investigación, haciendo referencia al objetivo general y los objetivos específicos que fueron planteados al comienzo de este trabajo.

Justificación

La presente investigación tiene como objetivo principal exponer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM. Con esto, el propósito es mostrar posibles conexiones e influencias que llevaron a Leonardo de Pisa a descubrir esta sucesión; la manera como esta influenció a otros hallazgos e invenciones, principalmente en el área de la teoría de números; y como el conocimiento de esta puede llevar a resolver problemas creativos y sencillos en las áreas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemática). Sin embargo, para lograr esto es necesario volver a los inicios de la matemática para poder comprender como surgió esta, como fue evolucionado y así señalar las posibles contribuciones.

Además de que las ciencias básicas, especialmente las matemáticas, son materias de gran interés, se tiene el deseo de estudiar una carrera profesional relacionada con las áreas STEM, haciendo que el presente proyecto sea útil no solo para conocer sobre el tema, sino también para tener un mayor conocimiento sobre aspectos como la historia de la matemática, sus avances a través del tiempo, la teoría de números, y otras áreas relacionadas al tema. Adicionalmente, es un tema que tiene muchas implicaciones matemáticas y aspectos para estudiar, y al unirlo con las áreas STEM pasa de ser un trabajo únicamente teórico a ser teórico-práctico, en donde se podrá aplicar a estudiantes de uno o dos grados del colegio con problemas creativos y sencillos.

Este estudio sobre la sucesión de Fibonacci es pertinente ya que puede ser aplicado a la mayoría de las áreas del conocimiento, como la biología, la astronomía, la tecnología, la música, el arte, la historia, la arquitectura y la literatura, pues se puede ver evidenciada tanto en aspectos de la naturaleza como los espirales de los girasoles, la forma de la oreja humana y el número de pétalos de una flor, como en creaciones humanas que incluyen la Gioconda, las Pirámides de Egipto y el Partenón. A pesar de que fue enunciada en el año 1202, este tópico está presente diariamente en lo que el ser humano tiene a su alrededor y es de gran relevancia aunque este no lo perciba todo el tiempo.

Pregunta de investigación

¿Cuál fue el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM?

Objetivos

Objetivo general

Exponer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM.

Objetivos específicos

1. Describir la influencia de la sucesión de Fibonacci antes y después de ser enunciada por Leonardo Pisa.
2. Analizar los aportes de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos.
3. Aplicar la sucesión de Fibonacci en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM con los grados 9º y 10º del Colegio Marymount.

Marco conceptual

A continuación, se presentarán todos los conceptos fundamentales que ayudarán a dar respuesta a la pregunta de investigación que fue planteada, para así lograr exponer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM, y, de la misma manera, cumplir los objetivos general y específicos mencionados anteriormente.

1 Contexto histórico

1.1 Línea del tiempo

Para analizar la influencia de la sucesión de Fibonacci, enunciada por Leonardo Pisa, es necesario hacer un rastreo bibliográfico, antes y después de los años 1175 y 1240 (nacimiento y muerte de Leonardo Pisa), con el fin de identificar pensadores y matemáticos que directa o indirectamente aportaron o aplicaron la sucesión de Fibonacci.

1.1.1 Pitágoras: 572-500 a.C.

Filósofo y matemático griego (Strathern, 1997).

Terna pitagórica: es un conjunto de tres números enteros (a, b, c) que cumple con la propiedad: $a^2 = b^2 + c^2$. Algunas ternas Pitagóricas son (5, 4, 3) (13, 12, 5) (29, 21, 20) (34, 30, 16) (Bulajich, 2006, p. 59).

La sucesión de Fibonacci está relacionadas con las ternas pitagóricas, pues al elegir cuatro términos consecutivos cualesquiera de la sucesión, podemos formar con ellos tres números que conformen una terna pitagórica. Por ejemplo, al tomar 2, 3, 5 y 8, se puede constituir de la siguiente manera:

1. Encontrar el producto de los dos números de los extremos: 2 x 8 = 16;
2. Obtener el doble del producto de los dos números centrales: 2 x (3 x 5) = 30;
3. Sumar los cuadrados de los dos números centrales: $3^2 + 5^2 = 34$.

Esto comprueba que los tres números obtenidos (34, 30, 16) forman una terna pitagórica (Rondero Guerrero, Campos Nava, Torres Rodríguez, & Acosta Hernández, 2018, p. 66).

1.1.2 Euclides: 365-300 a.C.

Matemático y geómetra griego (Levi, 2006, p. 9).

Número áureo o número de oro: Este es representado por la letra griega *phi* y equivale a $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803398875\ldots$

Curiosamente, este número se va obteniendo dividiendo cualquiera de los números de la sucesión de Fibonacci entre su antecesor, o por lo menos una aproximación a este, haciendo que el cociente se acerque cada vez más a esta cifra:

$F_2/F_1=1/1=1$; $F_3/F_2=2/1=2$; $F_4/F_3=5/3=1.66\ldots$; $F_5/F_4=8/5=1.6$; $F_6/F_5=13/8=1.625$; $F_7/F_6=21/13=1.61153\ldots$; $F_8/F_7=34/21=1.61904\ldots$; $F_9/F_8=55/34=1.61764\ldots$; $Fn/Fn\text{-}1 \approx \Phi$

(Viggiani Rocha, s.f., p. 32).

1.1.3 Pingala: 200 a. C.

Matemático indio era natural del actual estado de Kerala, en la India (Duffour, s.f).

Presenta la primera descripción conocida de un sistema de numeración binaria, igualmente hace una presentación del triángulo de Pascal (llamado *Meruprastāra*), donde incluyó material relacionado con los números de Fibonacci y su sucesión (Ibañéz, 2018).

1.1.4 Acarya Virahanka: 600-800.

Prosodista indio, conocido por su trabajo en matemáticas (Cuaderno de Cultura Científica, 2018).

Es quien hace la exposición más clara de la serie de Fibonacci en el año 700 por medio de la regla de formación del número de estructuras de *matra–vrtta*, explicando en su obra: "Juntando las variaciones de las dos métricas anteriores, se obtiene la cantidad. Este es un método para conocer el número (de variaciones) de la siguiente *matra–vrtta*" (Singh, 1985). De aquí se puede encontrar que el número de variaciones posibles, para versos con 1, 2, 3, 4 o 5 moras, es 1, 2, 3, 5 y 8, que son números de Fibonacci.

1.1.5 Jema Chandra: 1089-1172 o 1173.

Polímata, erudito y poeta que escribió sobre religión, prosodia, gramática, e historia de su época. Era conocido como un prodigio por sus contemporáneos (Monier-Williams , s.f., p. 1304) (Dundas, 2002).

Presentó una versión de la sucesión de Fibonacci alrededor del año 1150, cincuenta años antes de ser enunciada por Fibonacci (1202). Este estaba estudiando el número de cadencias de longitud *n*, encontrando que se podían hallar a través de la suma de una sílaba corta de longitud (*n*-1), o una larga de largura (*n*-2). Esta función $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ es la misma que describe la sucesión de Fibonacci para encontrar sus términos (Tetlow, 2007) (Koshy, 2001).

1.1.6 Leonardo de Pisa (Fibonacci): 1175-1240.

Matemático italiano que es considerado como el primer algebrista de Europa, debido a que se encargó de difundir en Occidente los conocimientos científicos del mundo árabe, los cuales recopiló en el Liber Abaci (Libro del ábaco) (Docentes Educación Navarra, s.f.).

La sucesión de Fibonacci se caracteriza porque cada término es el resultado de la suma de los dos anteriores, creando la serie: (0), 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…, cuyos números se conocen como los números de Fibonacci. Esta está definida por la función $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$ (Miller, Heeren, & Hornsby, 2005, p. 232).

1.1.7 Narayan Pandit: 1340-1400.

Importante matemático de la India (Singh, 1985, p. 229).

Se encargó de enunciar la versión hindú de los conejos de Fibonacci, llamado *Las vacas de Narayana* (Cuaderno de Cultura Científica, 2018).

> Si las vacas tienen una cría cada año, y cada ternera, después de los tres años que necesita para convertirse en una vaca madura, tiene una cría a principio de cada año, ¿cuántas vacas habrá después de 20 años a partir de una primera ternera? (Johnson & Allouche, s.f.)

1.1.8 Pierre De Fermat: 1601-1665.

Jurista francés que fue fundador de la teoría de números. Aunque no era matemático, tuvo grandes aportes en esta, y sus trabajos no se publicaron hasta después de su muerte (Docentes Educación Navarra, s.f.).

Retomó el trabajo realizado por Leonardo Pisa por ser el pionero de la transferencia de conocimientos e ideas de Oriente y Occidente, y por su interés en la teoría de números (Gutiérrez G., 2018, p. 59).

1.1.9 Blaise Pascal: 1623-1662.

Polímata, matemático, físico, teólogo católico y filósofo francés (Diez del Corral Zarandona, 2008, p. 405).

Pascal es conocido por el triángulo que lleva su nombre, el cual es utilizado para se pueden obtener los coeficientes para resolver los binomios de la forma $(x + a)^n$. En el triángulo de Pascal se hace evidente la sucesión de Fibonacci, trazando diagonales que al sumar dan origen a los números de dicha sucesión (Martínez, Salas S., & Fernández S., 2009).

1.1.10 Gottfried Wilhelm Leibniz: 1646-1716.

Filósofo, matemático, lógico, tecnólogo, jurista, bibliotecario y político alemán. Se le reconoce como el «último genio universal» (WikiZero, n.d.)

Leibniz es conocido por ser el creador del cálculo diferencial e integral. El desarrollo de este es ilustrado con la imagen clásica de la hermosa concha del *Nautilus* con su espiral logarítmica. Además, esta teoría enfrentó a Isaac Newton y Gottfried Leibniz, dos titanes del siglo XVII (Fry, 2018).

La sucesión de Fibonacci se puede encontrar en la concha del Nautilus, una especie de molusco marino que utiliza su concha para protegerse de depredadores, pues su concha se forma por el espiral de Fibonacci, aumentando su radio en un factor Φ por cada vuelta completa (al igual que la espiral) (Martínez C. , 2018) (Alonso & Bermúdez, 2002).

1.1.11 Leonhard Euler: 1707-1783.

Matemático y físico suizo, considerado como el principal matemático del siglo XVIII. Destacado por el número de Euler (*e*), número que aparece en muchas fórmulas de cálculo y física (Galindo Tixaire & López Pellicer, 2009, pp. 211-212).

El número de Euler, un número irracional, equivale a 2.71828 aproximadamente, y es uno de los números más importantes en matemáticas, debido a que es la base de los logaritmos naturales (inventados por John Napier) (Rojas González, 2017).

Euler fue el matemático más destacado de esa época, gracias a sus contribuciones decisivas en diversos campos de las matemáticas, sobre todo, en el campo de las sucesiones y de las series numéricas, al igual que Leonardo de Pisa con la sucesión de Fibonacci (Rojas González, 2017) (Galindo Tixaire & López Pellicer, 2009, pp. 211-212).

“Parece magia, pero son matemáticas.”

Si se continúa analizando los demás matemáticos, como Joseph-Louis LaGrange, Paolo Ruffini, Carl Friedrich Gauss, y muchos más, se confirmaría el uso y el aporte de la utilización de la sucesión de Fibonacci en sus estudios y aportes.

1.2 Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci debido a la contracción de filius Bonacci (descendiente de Bonacci), nació en la ciudad de Pisa alrededor del año 1175. Su padre, Guilielmo (conocido como Bonacci), tenía un cargo diplomático, pues su trabajo se basaba en representar a los comerciantes de Pisa que negociaban en Bugía (actualmente conocido como Bejaia), un puerto mediterráneo en el noreste de Argelia (Ugarte Fernández, 2011, pág. 11).

Cuando Fibonacci era adolescente, acompañó a su padre a Bugía, donde aprendió matemáticas. Luego viajó a Egipto, Grecia, Siria, Sicilia y Provenza y reconoció las ventajas de los sistemas matemáticos usados en estos países. Además, notó que las técnicas arábicas, creadas y perfeccionadas en India entre los años 300 a.C. y 700 d.C., eran más eficaces y fáciles que las que se usaban en la mayoría de los países europeos (números romanos), pues era un sistema que "usaba 10 símbolos y una notación posicional para representar cantidades como sumas de potencias de diez" (Ugarte Fernández, 2011, pág. 11), permitiendo trabajar con números de cualquier magnitud y escribir y comprobar operaciones. Debido a esto, aprendió a sumar, restar, multiplicar y dividir usando estos números y a escribir las operaciones en papel, algo que no era posible con los números romanos (págs. 11-12).

Fibonacci regresó a Pisa hacia el año 1200, donde escribió varios textos importantes para la matemática, donde proponía revivir habilidades matemáticas antiguas e hizo contribuciones propias. Estos incluyen el *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), y *Liber quadratorum* (1225). Debido a que vivió antes de que la imprenta fuera creada, todas sus obras eran copiadas a mano, haciendo que existieran muy pocas copias y que varias de ellas se perdieran. Finalmente, Fibonacci murió en el año 1240 en Pisa. (Prieto de Castro, Fibonacci, Leonardo da Pisa, s.f.).

1.2.1 Liber abaci

Leonardo publicó la primera edición del *Liber abaci*, su obra más conocida, en el año 1202. En este libro, Fibonacci introdujo las cifras indo-arábigas (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0) y expuso las reglas para realizar operaciones con estas, explicando que estos métodos de cálculo son superiores a los que se utilizan en Europa. Su intención era brindar a los ciudadanos, principalmente a los comerciantes, una herramienta de cálculo superior al ábaco tradicional y demostrar que estos métodos son más eficaces (Cordoba Muñoz, 2015).

El *Liber abaci* está dividido en quince capítulos. En los primeros cinco capítulos Fibonacci habla sobre la utilización de las cifras indo-arábigas y del cálculo con los números enteros, incluyendo las tablas para sumar, multiplicar, restar, y dividir (criterios de divisibilidad). En los capítulos VI y VII trata las fracciones y su descomposición en fracciones unitarias. Más adelante, entre los capítulos VIII y XI, se dedica a explicar la contabilidad mercantil, el cambio de monedas, y la regla de compañía. El capítulo XII contiene problemas variados con sus soluciones, que incluyen problemas de progresiones; en el capítulo XIII introduce la regla de doble falsa posición; en el capítulo XIV habla sobre las raíces cuadradas y cúbicas; y finalmente, en el capítulo XV, trata sobre problemas de geometría (Moreno Castillo, 2004, pp. 61-71).

El *Liber abaci* contenía todo lo que Fibonacci había aprendido en sus viajes y mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicado a la conversión de pesos y medidas, contabilidad comercial, cálculo, intereses, cambio de moneda y otras aplicaciones. Finalmente, este libro fue muy bien recibido en Europa y tuvo un gran impacto en el pensamiento matemático europeo (Cordoba Muñoz, 2015).

2 Sucesión de Fibonacci

Leonardo es famoso por la sucesión de Fibonacci que, aunque ya había sido descrita en textos hindúes, se encargó de explicarla y relacionarla con la naturaleza (Martínez C. , 2018). Según la historia surgió como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos. Esta fue enunciada en el *Liber abaci* en el problema más famoso que, como lo menciona Córdoba Muñoz (2015), decía:

> Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir (p. 7).

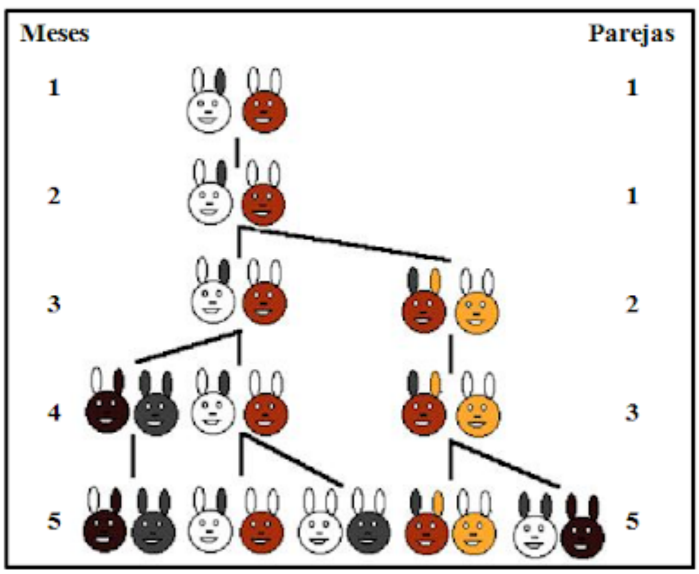


Figura 1: Diagrama de la reproducción de conejos enunciada por Fibonacci. Tomada de: https://sites.google.com/site/deptmatiesao/biografias/fibonacci

Como se ve evidenciado en el diagrama anterior, si se van contando las parejas que se tienen cada mes se obtiene la sucesión de Fibonacci que es: (0), 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…, cuyos números se conocen como los números de Fibonacci. Esta se caracteriza porque cada término es el resultado de la suma de los dos anteriores y está definida por la función $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, para $n\geq 3$ (Miller, Heeren, & Hornsby, 2005, p. 232). Adicionalmente, la función generadora de esta función es:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

y al utilizar las condiciones iniciales $f_0=0$ y $f_1=1$, se obtiene la ecuación $x^2-x-1=0$, y al usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se obtienen las raíces:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De aquí, el n-ésimo término está dado por la fórmula de Binet que se muestra a continuación:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(Cordoba Muñoz, 2015, p. 11).

2.1 Propiedades

La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades, y diferentes personas se han interesado por encontrarlas. Algunas de ellas son:

- Todos los números enteros se pueden obtener como la suma de los números de Fibonacci (Orendain López Vergara, Calvillo Hernández, & Leyva Garía, s.f.). Por ejemplo, si tomamos el número 37, lo podemos obtener como la suma de 34 y 3, dos números que hacen parte de la sucesión.

- Un número de cada tres de la secuencia es un número par (2, 8, 34, 144, …).
- Un número de cada cuatro es múltiplo de tres (3, 21, 144, …) (Minnaard & Condesse, 2005).
- Un número de cada cinco es múltiplo de cinco (5, 55, 610, …).
- El máximo común divisor de dos números de Fibonacci es un número de Fibonacci.
- Dos términos consecutivos son primos entre si (Hernández Del Toro, 2011, pp. 13-16).
- El cuadrado de un término es mayor o menor en una unidad que el producto del anterior y del posterior ($f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (f_n)^2 \pm 1$).
- A excepción del 3, todo número de Fibonacci que sea primo también tiene subíndice primo (Cordoba Muñoz, 2015, p. 23). Por ejemplo, F_7=13, y estos dos números son primos.
- La suma de diez elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci es igual a once veces el séptimo término de ese grupo de números de Fibonacci. Por ejemplo, si se suman los términos 1+1+2+3+5+8+$\underline{13}$+21+34+55=143, y luego se divide el resultado por 11, se obtiene como resultado 13, que corresponde al séptimo término de esta sucesión seleccionada (Benavente, 2014).
- Al sumar los cuadrados de dos números de Fibonacci consecutivos (F_n y F_{n+1}), se obtiene el número de orden $f_{2 \cdot n+1}$ (Viggiani Rocha, s.f., p. 32).
- Dejando aparte el 1, el 144 es el único cuadrado perfecto en la sucesión, y es el cuadrado de su subíndice (F_{12}), y el número 8 es el único cubo de la secuencia (Viana Martínez, s.f., p. 5).

2.2 Espiral de Fibonacci

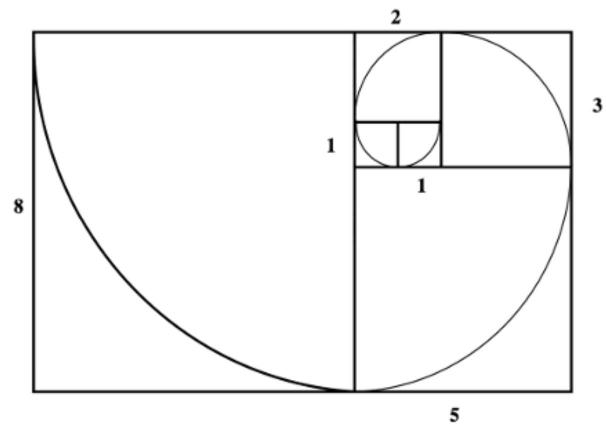


Figura 2: Espiral de Fibonacci. Tomada de:

https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34465088/GACETARSME_2002_05_1_03.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DEL_DIABLO_DE_LOS_UMEROS_Seccion_a_cargo.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz

La espiral de Fibonacci se forma al dibujar dos cuadrados con un lado de una unidad pegados en uno de sus lados, formando un rectángulo de 2x1. Luego, se dibuja otro cuadrado de lado dos pegado al lado de dos que ya se tenía formado. Después se pega un cuadrado de lado tres al lado que se acaba de obtener, y así sucesivamente. Es evidente que los lados de los cuadrados corresponden a los números de Fibonacci, y al trazar un cuarto de circunferencia por cada uno de ellos, se obtiene el espiral de Fibonacci (Balibrea Gallego, 2005, p. 51).

2.3 Aplicaciones

La sucesión de Fibonacci se puede ver tanto en aspectos de la naturaleza como en creaciones humanas, y durante toda la historia diferentes personas se han interesado en estudiar los lugares en los que esta se encuentra. A continuación se explicarán algunos de ellos.

2.3.1 Los números de Fibonacci y el número de oro.

La sucesión de Fibonacci tiene una gran relación con el número áureo o número de oro. Según Benavente (2014), este número fue descubierto por los griegos, y Euclides fue uno de los primeros en mencionarlo en su obra *Elementos*; además, se representa por la letra griega *phi* (Φ) en honor al famoso escultor Fidias, pues sus obras se consideraban las más cercanas a la perfección estética (Benavente, 2014).

Si se toma la solución positiva de la función generadora de esta sucesión y se resuelve, se obtiene como resultado Φ, que es igual a 1.6180339895…, haciendo que esta progresión esté altamente relacionada con el número de oro. Adicionalmente, cuando se toma un número de Fibonacci y se divide por el anterior, los resultados que se van obteniendo son:

$F_2/F_1=1/1=1$; $F_3/F_2=2/1=2$; $F_4/F_3=5/3=1.66\ldots$; $F_5/F_4=8/5=1.6$; $F_6/F_5=13/8=1.625$; $F_7/F_6=21/13=1.61153\ldots$; $F_8/F_7=34/21=1.61904\ldots$; $F_9/F_8=55/34=1.61764\ldots$; $F_n/F_{n-1}\approx \Phi$

Como se puede ver, el cociente es cada vez más cercano a Φ cuando los valores de los números de Fibonacci van creciendo, oscilando por encima y por debajo del valor de este y disminuyendo la diferencia cada vez más (Viggiani Rocha, s.f., p. 32).

2.3.2 En la matemática.

Una de las aplicaciones más conocidas en las matemáticas sobre la sucesión de Fibonacci es en el triángulo de Pascal, nombrado en honor al matemático y filósofo Blaise Pascal. Con este triángulo numérico se pueden obtener los coeficientes para resolver los binomios de la forma $(x + a)^n$, donde n corresponde a la fila del triángulo de Pascal (Martínez, Salas S., & Fernández S., 2009). En este triángulo se puede encontrar la sucesión de Fibonacci al sumar los valores de las diagonales de menor pendiente, como se muestra en la siguiente figura:

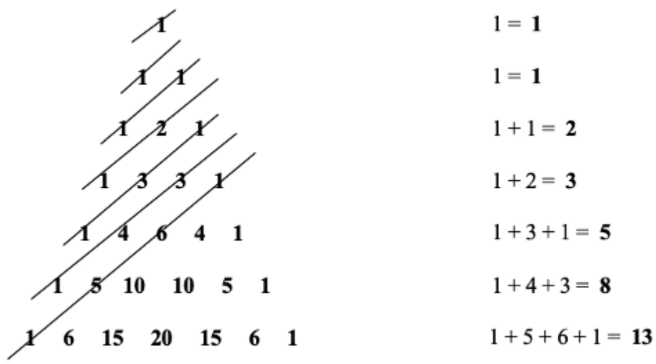


Figura 3: Triángulo de Pascal y sucesión de Fibonacci. Tomado de:

https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/FibonacciFinal2.pdf

2.3.3 En la naturaleza.

En primer lugar, la sucesión de Fibonacci se puede encontrar en la concha del Nautilus, una especie de molusco marino que utiliza su concha para protegerse de depredadores. Su concha se forma por el espiral de Fibonacci (Martínez C. , 2018). Al igual que la espiral de Fibonacci, "el radio aumenta en un factor Φ por cada vuelta completa" (Alonso & Bermúdez, 2002, p. 183).

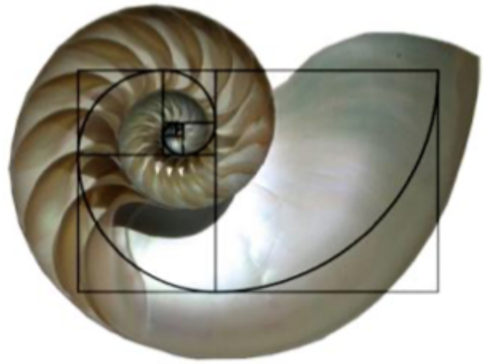


Figura 4: Concha del Nautilus. Tomada de:

https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53430029/MP430-Trabajo01-LaSucesionDeFibonacci.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DESCUELA_BIBLICA_ESCRITURAS_ONLINE.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA25

A su vez, la sucesión de Fibonacci aparece en la estructura de la repartición de las semillas de algunas plantas, la cantidad de pétalos de muchas flores, la filotaxia[1] de las plantas, y en la organización de las espinas de algunos cactus; encontrando en cada uno de estos un número o varios números de Fibonacci. Por ejemplo, en el *Helianthes annulus*, una especie de girasol, se puede notar que sus pipas están repartidas de una manera ordenada, formando líneas espirales que comienzan en el centro y se abren hacia fuera. Normalmente, si se cuentan la cantidad de semillas en cada línea espiral, se encuentra un número de Fibonacci, y al contar las espirales de cada tipo, se obtienen dos números de Fibonacci consecutivos (Alonso & Bermúdez, 2002, pp. 184-185).

[1] La filotaxia, o filotaxis, es "el estudio metódico de la ordenación de las hojas y otros órganos del cuerpo vegetal (escamas, brácteas, espinas, yemas en general)" (Parra León, Granier D, & Kerdel Vegas, 1971).

Figura 5: Números de Fibonacci en el girasol. Tomada de: https://www.eldefinido.cl/actualidad/plazapublica/7723/El-numero-de-oro-Que-es-donde-esta-y-para-que-sirve/

Por el contrario, la sucesión de Fibonacci se puede ver en la forma en la que se acomodan las galaxias y los huracanes, pues estos toman la forma de la espiral.

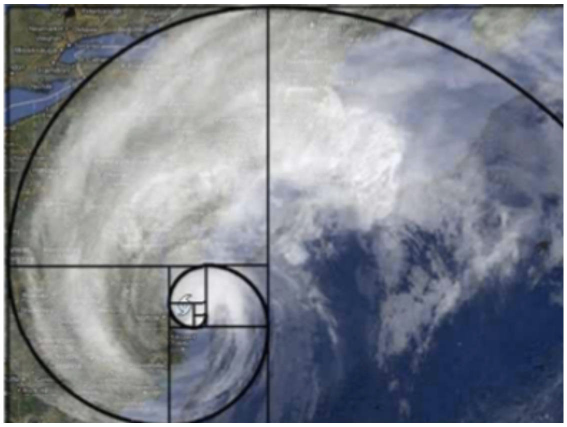


Figura 6: contorno de un huracán y sucesión de Fibonacci. Tomada de: https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Gonzalez118/publication/333602685_Workshop_Leonardo_de_Pisa_Fibonacci_or_The_mathematical_awakening_of_the_Western_European_Medieval_Culture/links/5cf6366d299bf1fb18563d8

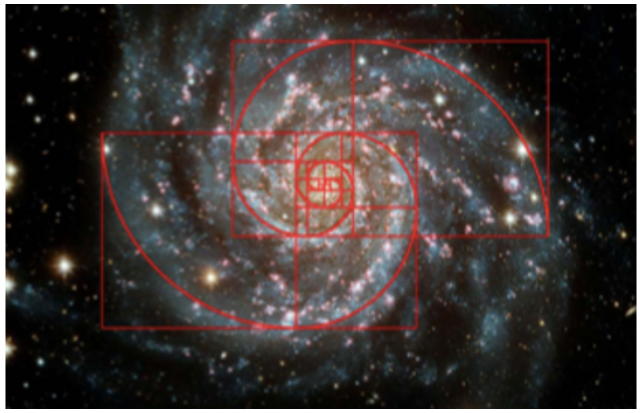


Figura 7: Contorno de una galaxia y sucesión de Fibonacci. Tomada de: https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Gonzalez118/publication/333602685_Workshop_Leonardo_de_Pisa_Fibonacci_or_The_mathematical_awakening_of_the_Western_European_Medieval_Culture/links/5cf6366d299bf1fb18563d

Finalmente, en el árbol genealógico de las abejas, se conoce que los machos (zánganos) no tienen padre, por lo que cada uno tienen una madre, dos abuelos, tres bisabuelos, cinco tatarabuelos, y así sucesivamente, obteniendo los términos de la sucesión de Fibonacci (Bulajich, 2006, p. 55).

2.3.4 En el cuerpo humano.

En el cuerpo humano también se puede encontrar los números de Fibonacci, permitiendo que las proporciones sean armónicamente perfectas. Por ejemplo, la razón áurea se puede encontrar en la relación entre la altura del ser humano y la altura de su ombligo; la proporción entre la distancia del hombro a los dedos y del codo a los dedos; y la razón entre la distancia de la cadera a los pies y la altura de la rodilla (Díaz Ramírez, s.f.).

Además de esto, los números de Fibonacci se ven en la proporción entre las falanges de la mano, permitiendo cerrar la mano perfectamente en forma de puño (Casero Muñoz de Morales, 2017).

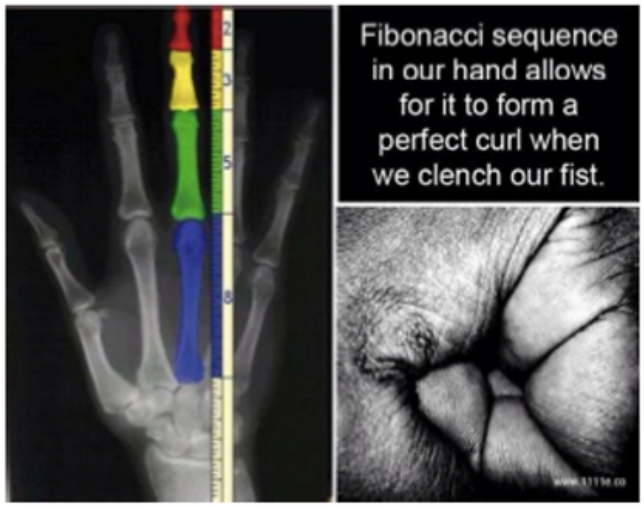


Figura 8: mano humana y sucesión de Fibonacci. Tomada de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53430029/MP430-Trabajo01-LaSucesionDeFibonacci.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DESCUELA_BIBLICA_ESCRITURAS_ONLINE.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-

El cuerpo humano se considera más atractivo cuando se acerca más a las proporciones del número áureo. En el caso de la oreja, cuando se acerca a la forma de la espiral de Fibonacci, se considera más bonita (Canales, et al., 2019).

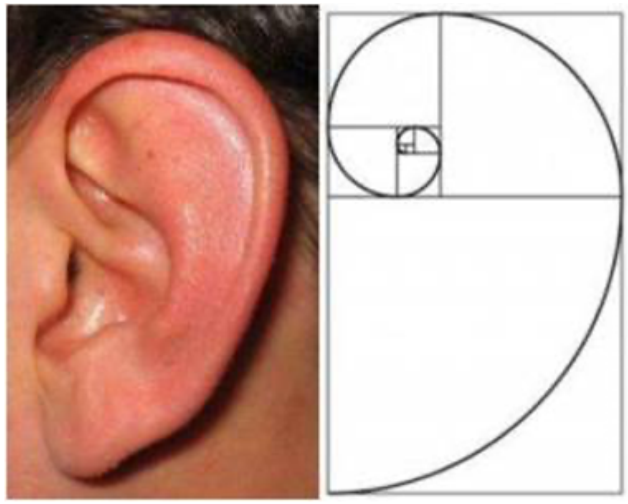


Figura 9: Oreja y sucesión de Fibonacci. Tomada de: http://wordpress.colegio-arcangel.com/investigandoconciencias/el-numero-aureo/

2.3.5 En las creaciones humanas.

En primer lugar, varias de las obras de Leonardo Da Vinci son reconocidas por aplicar la sucesión de Fibonacci, y así encontrar proporciones armónicas. Por ejemplo, en el rostro de la *Gioconda*, creada en 1503, se puede ver la presencia de la espiral de Fibonacci; y en el *hombre de Vitruvio* se pueden ver las relaciones entre las articulaciones del hombre mencionadas anteriormente (González Zacarías, Palomino Ovando, & Cocoletzi, 2010, p. 21).

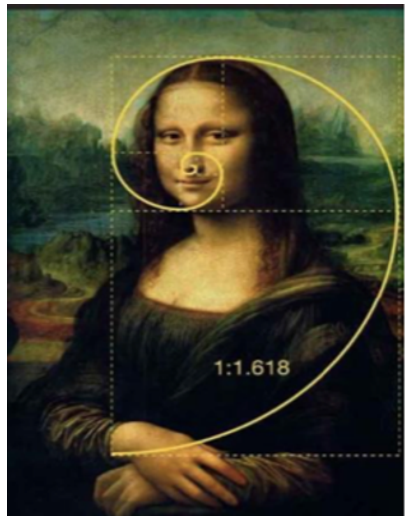


Figura 10: Espiral de Fibonacci en la Gioconda. Tomada de:

http://dspace.udla.edu.ec/bitstream/33000/6046/1/UDLA-EC-TOD-2016-86.pdf

En adición, se pueden ver los números de Fibonacci en las teclas del piano, ya que hay 8 teclas blancas y 5 negras que aparecen en grupos de 2 y 3 (Berrio Escudero, s.f., p. 2).

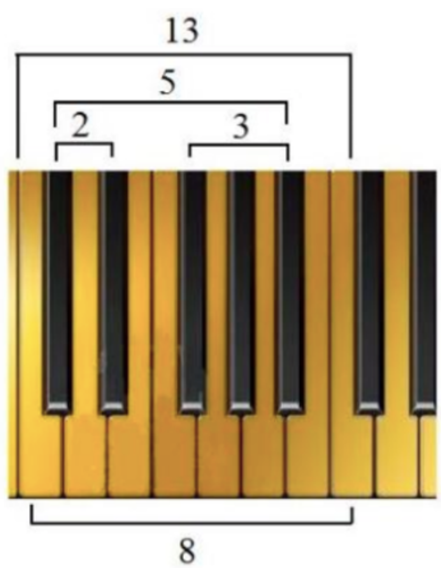


Figura 11: sucesión de Fibonacci en el piano. Tomada de:

https://en.calameo.com/read/00530653664c84b3a4f25

Sumado a esto, el Partenón griego y las pirámides de Egipto también respetan la proporción áurea y la sucesión de Fibonacci. En el Partenón la relación entre el techo, las columnas, y las partes de este muestran la espiral de Fibonacci (González Zacarías, Palomino Ovando, & Cocoletzi, 2010).

Figura 12: Partenón griego. Tomada de:

http://132.248.204.81/nano/index.php/nano/article/view/52236/46532

Finalmente, en las tarjetas de crédito actuales se puede ver esta proporción, pues la razón entre el ancho y el alto muestran la proporción áurea y la espiral de Fibonacci perfectamente (Barberá Saiz, 2012, p. 4).

Figura 13: Tarjetas de crédito y sucesión de Fibonacci. Tomada de:

https://neuromarketing.la/2015/12/el-numero-de-oro-y-su-influencia-en-el-marketing/

3 Teoría de números

Según Niven y Zuckerman (1969), la teoría de números es la rama de la matemática que "está relacionada primordialmente con las propiedades de los números naturales, 1, 2, 3, 4, …, también llamados enteros positivos." (p. 9). Sin embargo, la teoría también estudia la totalidad de los números enteros (positivos y negativos), y algunos de sus teoremas se pueden probar más fácilmente utilizando las propiedades de todos los números enteros o de los complejos (Niven & Zuckerman, 1969, p. 9).

De acuerdo con Apóstol (2002), estos números son, sin duda, la primera creación matemática del hombre, pues es muy difícil imaginar al hombre sin la habilidad de contar (p. 1).

3.1 Surgimiento

La historia dice que en los años 5700 a.C. los antiguos sumerios tenían un calendario, teniendo que haber desarrollado alguna forma de aritmética en esa época. Más adelante, en los años 2500 a.C. los sumerios crearon un sistema de numeración que tenía como base el número 60, y más adelante este pasó los babilonios, quienes desarrollaron una gran capacidad para calcular, pues se han hallado tablillas de arcilla (años 2000 a.C.) de estas civilizaciones que se componen de tablas de matemáticas elaboradas. Luego, cuando las civilizaciones tenían tiempo libre para cuestionarse sobre diferentes cosas, algunos comenzaron a especular sobre la naturaleza y las propiedades de los números. Adicionalmente, los números fueron utilizados para establecer los recuerdos y celebrarlos, y para las transacciones comerciales (Apostol, 2002, p. 1).

A pesar de que los números se han estudiado desde hace miles de años, se le atribuye la primera orientación científica al estudio de la teoría de números a los griegos, para quienes la palabra "número" significaba entero positivo y nada más (Burton, 2002, p. 1).

3.2 ¿Qué estudia?

Como fue mencionado anteriormente, la teoría de números se preocupa por estudiar las propiedades de los números enteros, principalmente los positivos; por lo tanto, algunas de las áreas estudiadas son divisibilidad, congruencias, propiedades de los números primos, ley de la reciprocidad cuadrática, teorema de factorización única, y números perfectos.

3.2.1 Divisibilidad.

Un numero entero cualquiera (*b*) es divisible por otro número entero (*a, a*>0), si existe otro número entero (*x*) que al ser multiplicado por *a* sea igual a *b* (*b=ax*) (Niven & Zuckerman, 1969, p. 11). Por ejemplo, para saber si el número 36 es divisible por 12, se debe buscar un número que al ser multiplicado por 12 de como resultado 36, y al realizar esto, se encuentra que 36=12•3, obteniendo que 12 es un divisor de 36 (12|36).

3.2.2 Congruencias.

Si un entero positivo *m* divide la diferencia de dos números, *a-b,* se dice que *"a* es congruente a *b* módulo *m.*" Esto se escribe *a*≡*b* mód. *m.* Ejemplificando, 5≡9 mód. 4, ya que 9-5=4, y este es divisible por 4 (Gil Bor, 1998, p. 12).

3.2.3 Propiedades de los números primos.

Según Baker (1986), "un número natural, distinto de 1, se dice que es primo si es divisible sólo por él mismo y por 1. Los primos más pequeños son 2, 3, 5, 7, 11, …" (p. 18).

3.2.4 Ley de la reciprocidad cuadrática.

La ley de la reciprocidad cuadrática fue enunciada por primera vez por Euler en 1784-85. Esta dice "si existe un x tal que $x^2 - p$ es divisible por q, entonces p se dice un residuo o resto cuadrático de q. Si no existe tal x, p se dice un no resto cuadrático de q." (León Cardenal, 2006, p. 475). Si p o q son de la forma 4k+1, entonces p es un residuo cuadrático de q si y solo si q es un resto cuadrático de p; o si p y q son de la forma 4k+3, entonces p es un residuo cuadrático de q si y solo si q no es un resto cuadrático de p (León Cardenal, 2006, p. 475).

3.2.5 Teorema de factorización única

El teorema de factorización única dice que todo entero mayor a 1 se puede mostrar como producto de uno o más números primos (LeVeque, 1968, p. 31). El 72 es una evidencia de esto ya que se puede representar como el producto de 2^3x3^2, ambos números primos.

3.2.6 Números perfectos.

Pitágoras, como expresa Cadavieco Castillo (2002), los números perfectos se dan "cuando la suma de los divisores de un número dan exactamente el mismo número" (p. 48). Los primeros números incluyen el 6 (6=1+2+3), el 28 (28=1+2+4+7+14), el 496 y el 8128. Además de la suma de sus divisores, Pitágoras encontró otras propiedades de estos números, pues estos siempre son resultado de la suma de una serie consecutiva de números cardinales. Así se tiene que: 6=1+2+3 y 28=1+2+3+4+5+6+7 (Cadavieco Castillo, 2002, p. 48). Más adelante, Euclides descubrió que los números perfectos son siempre múltiplos de dos números, y uno de ellos es potencia de 2 y el otro potencia de 2 menos 1. Por ejemplo, $6=2^1x(2^2-1)$ y $28=2^2x(2^3-1)$ (Cadavieco Castillo, 2002, p. 49).

4 Metodología

Con el fin de dar una respuesta a la pregunta de investigación y cumplir con los objetivos de la presente investigación, se utilizará una metodología cuantitativa, en la que se realizarán cuestionarios a estudiantes de noveno y décimo grado del Colegio Marymount de Medellín, aplicando problemas creativos y sencillos de las áreas STEM. A través de esta se analizarán los datos obtenidos para lograr describir el aporte de la sucesión de Fibonacci en la solución de estos problemas.

4.1 La investigación cuantitativa

La investigación cuantitativa es una manera estructurada de recopilar y analizar datos que se obtienen de diferentes fuentes a través del uso de instrumentos estadísticos, informáticos, y matemáticos para obtener resultados. Esta cuantifica el problema y lo entiende por medio de la búsqueda de resultados, utilizando una metodología descriptiva y/o explicativa. Este tipo de investigación estudia un fenómeno que siempre se puede observar, medir y replicar en un contexto controlado, utilizando un lenguaje que tiene precisión matemática y que utiliza modelos estadísticos.

4.2 La investigación explicativa

La investigación explicativa no solo se encarga de analizar las relaciones entre diferentes fenómenos o situaciones, sino que de profundiza en las causas y en las consecuencias de estos. Además, requiere la existencia de variables dependientes e independientes, delimitando las variables que intervienen, y controlando y manipulando algunas condiciones del tema de investigación. Esta utiliza métodos cuantitativos y sigue el razonamiento hipotético deductivo, utilizando un proceso similar al que se utiliza en experimentos de laboratorio.

4.3 Instrumento

Para llevar a cabo la investigación cuantitativa, se realizarán cuestionarios. Un cuestionario está definido como el "documento que recoge de forma organizada los indicadores de las variables implicadas en el objetivo de la encuesta" (Rojas, 1998). Este es el formulario que contiene las preguntas que van a ser dirigidas a la población. El objetivo que se pretende cumplir con el uso de este es traducir las variables que se desean estudiar en preguntas concretas que tengan la capacidad de suscitar respuestas válidas, fiables y susceptibles de ser cuantificadas. Las preguntas deben ser determinadas, concisas, claras y cerradas para facilitar la codificación posterior, y antes de su redacción se deben tener en cuenta las características de la población y la manera como será aplicada, para así determinar el número de preguntas, el formato de respuestas, el lenguaje, y otras características relevantes. Finalmente, el cuestionario puede ser respondido sin la presencia del entrevistador, siempre y cuando existan orientaciones para explicar la forma de contestar.

Debido a la contingencia por la pandemia del COVID-19, no había posibilidad de explicarle la sucesión de Fibonacci, sus bases, sus propiedades, y sus aplicaciones a las estudiantes que realizarían el cuestionario de una manera presencial, por lo que se realizó un video en donde se explica esto. Antes de contestar, las alumnas debían ver el video, y de esta forma comprendían los conceptos necesarios al momento de responder el cuestionario (ver anexo 1).

De aquí que las preguntas que se realizarán en la encuesta con sus respectivas opciones de respuesta son (la respuesta subrayada es la correcta):

1. Calcular el duodécimo (12º) término de la sucesión de Fibonacci.
    a. 89
    b. 144
    c. 233
    d. 125

2. La sucesión de Fibonacci, ¿Es una sucesión creciente, decreciente, o alternada?
    a. Creciente
    b. Decreciente
    c. Alternada

3. En la siguiente figura, se han dibujado en rojo las diagonales del triángulo de Pascal con 9 filas. ¿Cuánto suman los números de cada diagonal? (de arriba hacia abajo)

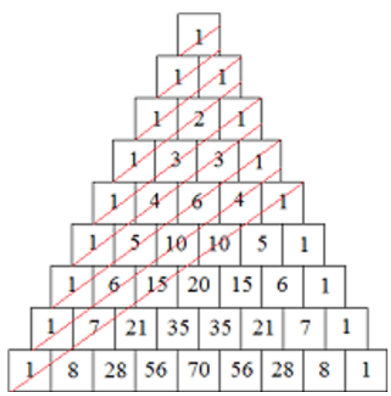


Figura 14: triángulo de Pascal. Tomada de:
https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html

    a. 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34

b. 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

c. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

d. <u>1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34</u>

4. ¿Cuánto mide el área total de la espiral de Fibonacci mostrada? (tener en cuenta que hay 9 cuadrados en la figura)

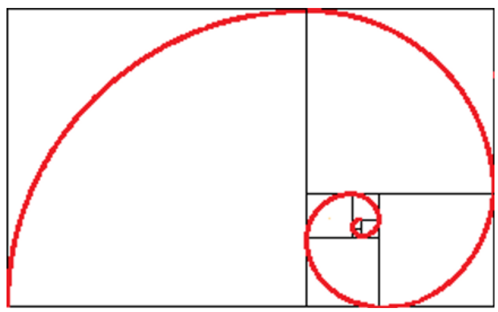


Figura 15: Espiral de Fibonacci. Tomada de: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html

a. <u>1870</u>

b. 714

c. 1836

d. 693

5. Utilizando la siguiente propiedad, calcular el MCD (máximo común divisor) del cuarto y octavo término de la sucesión de Fibonacci.

Propiedad:

El máximo común divisor de los números de Fibonacci que ocupan las posiciones *n* y *m* coincide con el término cuya posición es el máximo común divisor de *n* y *m*.

$$MCD(a_n, a_m) = a_{MCD(n,m)}$$

Figura 16: Propiedad máximo común divisor. Tomada de: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-Fibonacci-formulas-problemas-resueltos-suma-espiral-triangulo-Pascal.html

a. 3 (posición 4)

b. 4 (posición 3)

c. 5 (posición 4)

d. 2 (posición 3)

4.4 Población y muestra

La población a la cual se le aplicarán las encuestas son las estudiantes de noveno y décimo grado del Colegio Marymount, quienes están entre las edades de 14-17 años de edad y estratos socioeconómicos 5-6. Este grupo de personas tiene características homogéneas, permitiendo tener una muestra estratificada.

Análisis

Con el propósito de responder la pregunta de investigación y establecer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM, se realiza el siguiente análisis del cuestionario que las alumnas de noveno y décimo grado del Colegio Marymount contestaron. Según el Diccionario de la Real Academia Española (2019), el análisis se entiende como la "Distinción y separación de las partes de algo para conocer su composición" y el "Estudio detallado de algo, especialmente de una obra o de un escrito."

El cuestionario que las alumnas de noveno y décimo grado respondieron estaba compuesto por cinco preguntas de selección múltiple que hacían alusión a la sucesión de Fibonacci, y cuyo nivel de dificultad iba aumentando cada vez más. Antes de responder, las alumnas tuvieron la oportunidad de ver un video previamente organizado, en donde se explicaban los conceptos principales de esta sucesión, y de esta manera tenían un conocimiento básico del tema que podía ser útil al momento de contestar (https://www.powtoon.com/c/d5XLtd8owCF/1/m). Además, debían usar conceptos básicos de las matemáticas, como la suma y el área de un rectángulo, y el pensamiento lógico, los cuales ya deberían conocer y saber aplicar.

A continuación, se expondrán los resultados de cada una de las preguntas contestadas por las estudiantes, y se realizará un breve análisis de cada una de ellas, en donde se interpretará la información obtenida en la aplicación del instrumento de investigación. Finalmente, se hará un análisis general de los resultados, lo que mostrará si realmente tener conocimiento sobre la sucesión de Fibonacci ayuda a responder este tipo de problemas.

Los resultados de la primera pregunta fueron los siguientes:

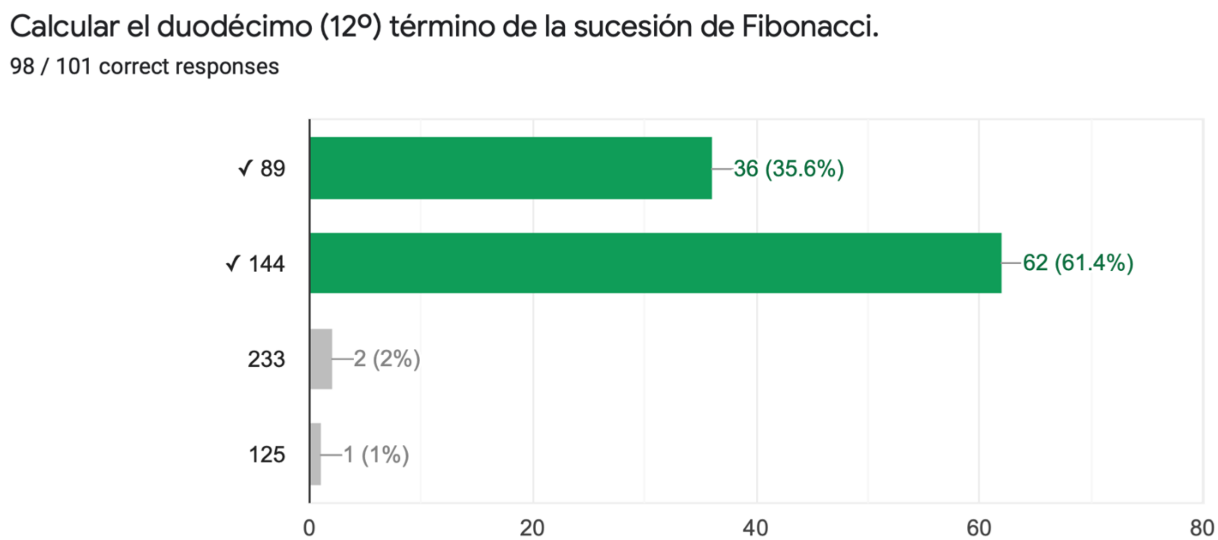


Figura 17: Gráfica resultados pregunta 1. Fuente: elaboración propia, 2020.

Aquí se puede evidenciar que 98 de 101 estudiantes contestaron correctamente, lo que representa un 97% de la población total. El 35.6% respondió “89,” debido a que tomaron el 0 como primer término de la sucesión; y el 61.4% escogió “144,” utilizando el 1 como primer término. Por otro lado, solo el 3% de la población, que corresponde a 3 estudiantes, seleccionó las opciones incorrectas (“233” y “125”).

En esta pregunta, la mayoría de las estudiantes respondieron correctamente, arrojando resultados positivos. Es evidente que, en general, el principio básico de encontrar los términos de la sucesión fue comprendido, ya que lograron sumar los términos hasta llegar al duodécimo y responder acertadamente.

En segundo lugar, los resultados de la segunda pregunta fueron:

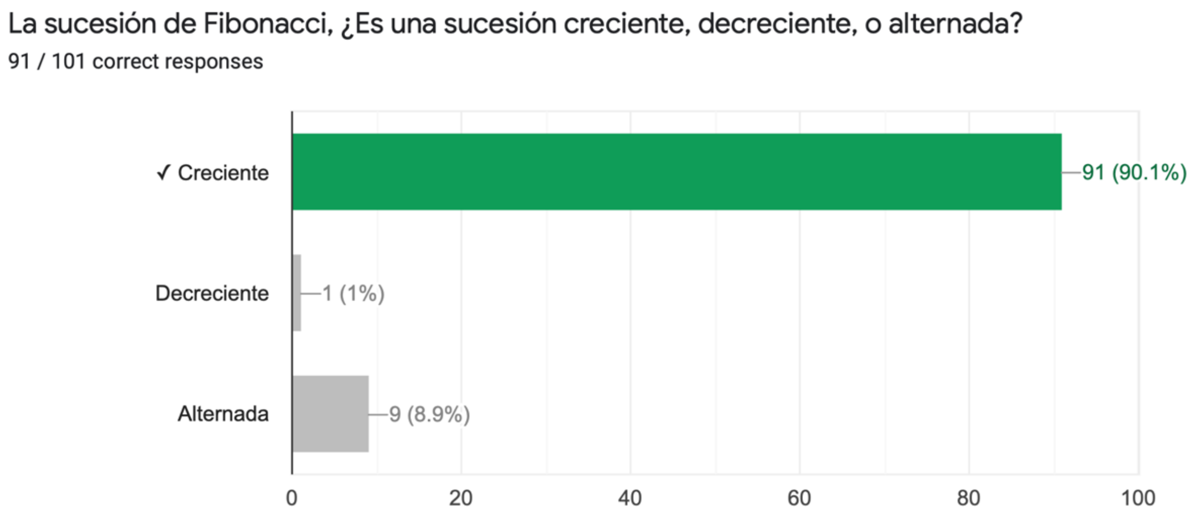


Figura 18: Gráfica resultados pregunta 2. Fuente: elaboración propia, 2020.

En esta se puede ver que 91 de 101 estudiantes dijeron que la sucesión es "creciente," lo que corresponde a 90.1% de respuestas correctas. 10 estudiantes respondieron incorrectamente, pues una seleccionó "decreciente" (1%) y nueve seleccionaron "alternada" (8.9%).

Esto se debe a que cada término, a excepción del primero y el segundo (1 y 1), es siempre mayor al anterior. A pesar de que esto no fue explicado anteriormente, por ser "creciente, decreciente y alternado" términos que ya deben estar interiorizados por las estudiantes de estos grados; la mayoría lograron deducir la respuesta acertada, comprendiendo la sucesión para aplicarla a preguntas sencillas como esta. Adicionalmente, es posible que las estudiantes que respondieron "alternada" lo hicieron porque el primer y el segundo término son los mismos, lo que pueden interpretar como un factor que hace que la sucesión no sea creciente.

En la tercera pregunta, los resultados fueron:

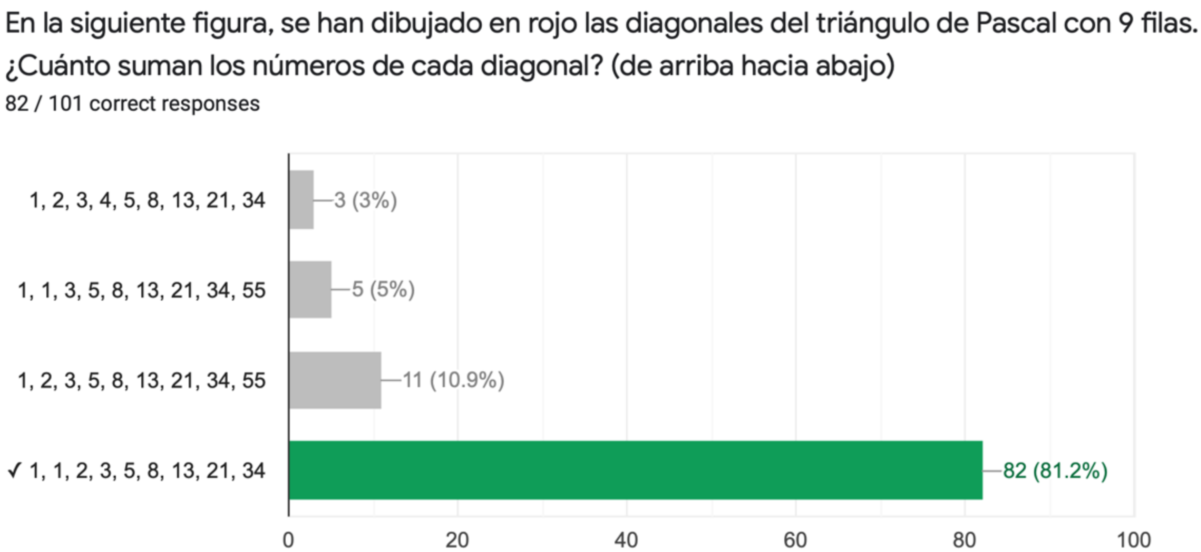


Figura 19: Gráfica resultados pregunta 3. Fuente: elaboración propia, 2020.

Aquí también se puede ver que la mayoría de las estudiantes, 82 de ellas, respondieron correctamente, lo que representan el 81.2% de la muestra, pues seleccionaron la respuesta "1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34." Por el contrario, 3 respondieron "1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 34"; 5 seleccionaron "1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55"; y finalmente, 11 contestaron "1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55", representando un total de 18.8% de contestaciones incorrectas.

En esta pregunta, se mostraba la imagen del triángulo de Pascal presentada anteriormente (en la metodología) para que las estudiantes pudieran responder, y de esta manera se vieron muchos resultados positivos, demostrando que las alumnas comprendieron la aplicación que la sucesión de Fibonacci tiene en el triángulo de Pascal. Es evidente que las estudiantes que lograron observar detenidamente la figura mostrada y sumar las diagonales demarcadas, utilizaron los conceptos básicos de la matemática como la suma de diferentes números y organizarlos.

En la penúltima pregunta, los resultados fueron los siguientes:

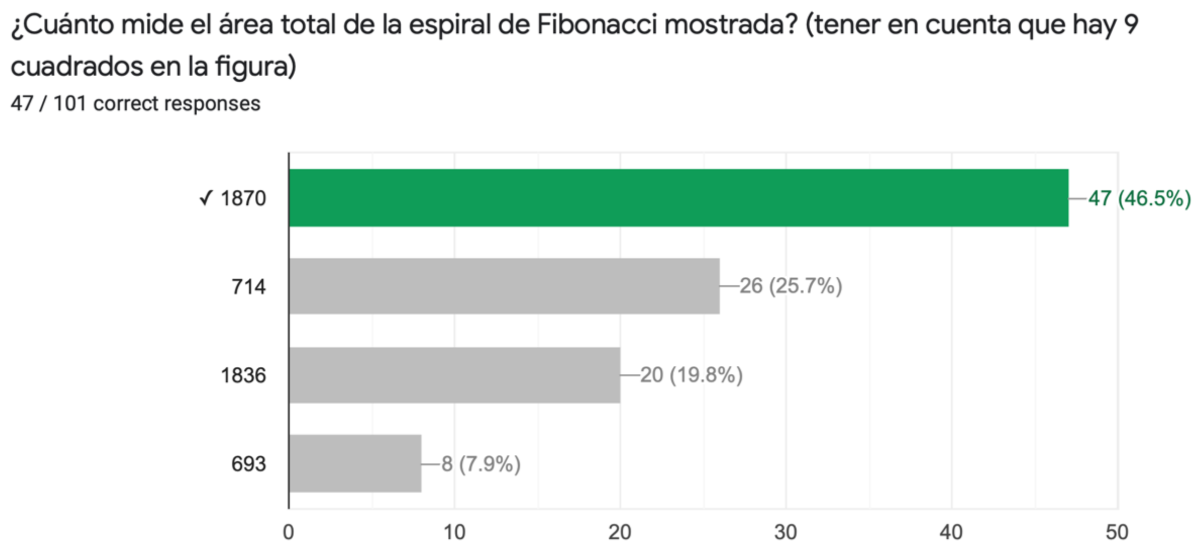


Figura 20: Gráfica resultados pregunta 4. Fuente: elaboración propia, 2020.

En esta pregunta, solo el 46.5% de los encuestados contestaron correctamente, diciendo que el área total de la espiral mostrada es de "1870", y el otro 53.5% escogieron alguna de las respuestas incorrectas, debido a que 26 personas seleccionaron "714", 20 estudiantes respondieron "1836", y las otras 8 personas afirmaron que el área es "693."

Se puede ver claramente una menor diferencia en la cantidad de respuestas correctas e incorrectas, pues más de la mitad son erróneas. Esto se debe a que esta pregunta tiene un grado de complejidad mayor, y requiere que las estudiantes analicen mejor la pregunta. Adicionalmente, además de aplicar la sucesión de Fibonacci, deben utilizar el concepto básico del área del rectángulo, lo que puede arrojar resultados negativos.

Finalmente, los resultados de la última pregunta son los siguientes:

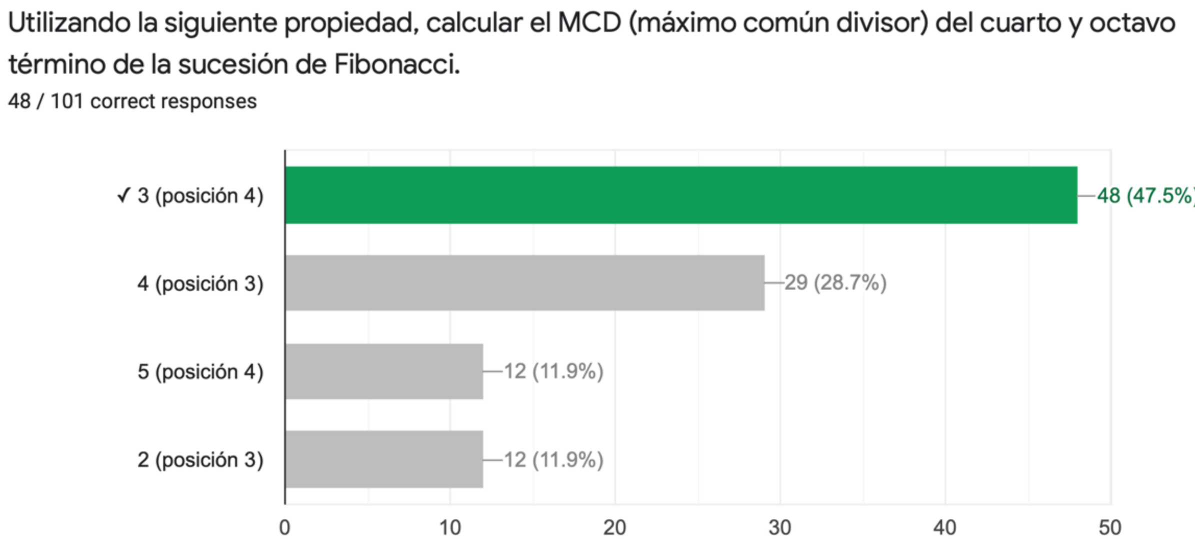


Figura 21: Gráfica resultados pregunta 5. Fuente: elaboración propia, 2020.

Al igual que la pregunta anterior, se puede ver que la diferencia entre respuestas correctas e incorrectas es muy pequeña, pero el porcentaje de respuestas erróneas es mayor. Solo 48 de 91 estudiantes respondieron correctamente "3 (posición 4)," lo que representa un 47.5% de la población total. En cambio, el 28.7% respondieron "4 (posición 3)", y ambos, "5 (posición 4)" y "2 (posición 3)", obtuvieron el 11.9%.

En esta pregunta, las estudiantes no solo debían relacionar la propiedad que se les estaba mostrando con la sucesión de Fibonacci, sino con las bases matemáticas que ya deberían conocer, como lo es encontrar el máximo común divisor entre dos números. Se puede comprender que esta pregunta causó dificultad en la muestra, arrojando más respuestas negativas que positivas.

En general, se puede ver que las estudiantes comprendieron gran parte de las preguntas y lograron contestarlas exitosamente. A continuación, se presentan los resultados finales del cuestionario, con una nota del 1 al 5, 1 siendo la más baja y 5 siendo la más alta.

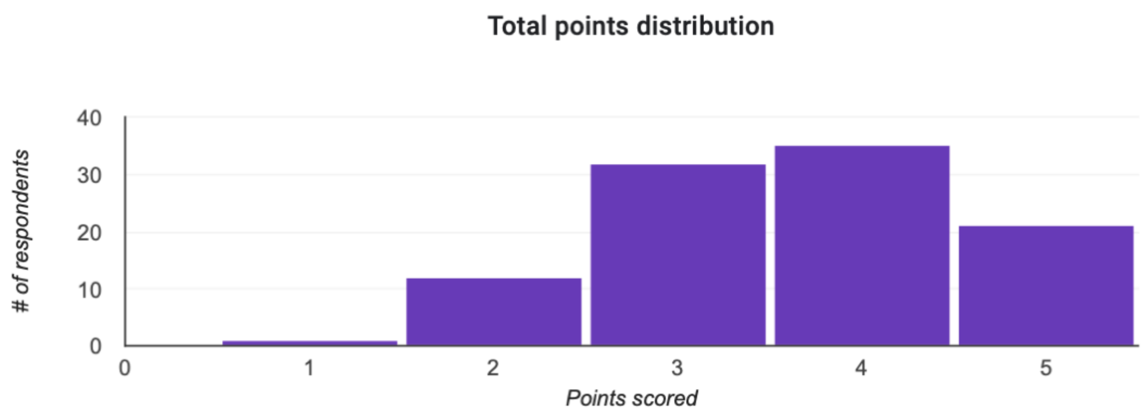


Figura 22: Gráfica distribución total de resultados. Fuente: elaboración propia, 2020.

En la gráfica anterior, se puede ver que solo 1 persona obtuvo 1, 12 estudiantes sacaron 2, 32 encuestados tuvieron un resultado de 3, 35 personas respondieron 4 preguntas correctamente, y 21 estudiantes obtuvieron un resultado perfecto de 5 preguntas correctas. Esto arroja un promedio de 3.62 puntos, y la moda de estos resultados es 4.

Como se puede ver, la mayoría de los resultados tienden a ser 3 puntos o más, lo que demuestra que la mayoría de las estudiantes comprendieron el concepto de la sucesión, sus propiedades y aplicaciones, y de esta manera lograron responder varias preguntas correctamente; sin embargo, las últimas dos preguntas mostraron un bajo nivel de contestaciones acertadas, lo que demuestra que varias estudiantes tuvieron dificultad relacionando la sucesión de Fibonacci con diferentes conceptos de las matemáticas que ya conocen.

Conclusiones

Como parte final de este trabajo de investigación, para dar respuesta a la pregunta de investigación, se contestarán el objetivo general y los objetivos específicos que fueron planteados al principio del mismo, utilizando la investigación realizada en el marco conceptual sobre el contexto histórico, la sucesión de Fibonacci y la teoría de números, y lo obtenido a través del cuestionario aplicado a las alumnas de noveno y décimo grado del Colegio Marymount que estaba compuesto por problemas creativos y sencillos de las áreas STEM.

Para comenzar, el objetivo general de la investigación era exponer el aporte de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM. De este se puede concluir que la sucesión de Fibonacci es una serie muy sencilla que, más allá de estar relacionada con diversos temas y áreas del conocimiento, hace parte de la vida diaria de los seres humanos, y aunque generalmente no se tenga en cuenta, siempre está presente en cosas tan sencillas como la organización de las semillas de diferentes plantas, los huracanes, las teclas del piano, y hasta en cuerpo humano (falanges de los dedos de las manos, proporciones del cuerpo, y belleza). Por esto, se considera que debería hacer parte del currículo de estudio en áreas como biología, matemáticas, tecnología, física, y química, pues le puede permitir a las estudiantes comprender más a fondo algunos de los objetos y situaciones que las rodean y que viven diariamente.

Además, es relevante mencionar que la sucesión enunciada por Leonardo de Pisa tuvo grandes aportes en la matemática, especialmente en la teoría de números, pues describió conceptos importantes que son de gran utilidad y uso actualmente, incluyendo los números indo-arábigos (utilizados en la actualidad) y las operaciones básicas con estos (suma, resta, multiplicación, división, fracciones, raíces cuadradas).

El primer objetivo específico planteado era describir la influencia de la sucesión de Fibonacci antes y después de ser enunciada por Leonardo Pisa. Este es evidente en el marco contextual, pues se estudiaron algunos de los matemáticos más importantes que contribuyeron a la teoría de números, y se relacionaron con Leonardo de Pisa y sus descubrimientos y aportes, confirmando así que la sucesión de Fibonacci permitió tocar la vida de muchos pensadores y matemáticos, antes y después de su gran aporte al desarrollo de la teoría de números. Esto se demuestra porque al analizar los aportes a la matemática y a la teoría de números de cada uno de estos matemáticos, incluyendo a Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Pitágoras, Euclides y Narayan Pandit, se puede ver que esta serie está presente, sea en aspectos como la suma de las diagonales del triángulo de Pascal, la obtención de ternas pitagóricas utilizando los números de Fibonacci, los cocientes de los números de Fibonacci para obtener el número de oro, o el problema de las vacas de Narayana.

En adición, sin importar la época en la que vivió cada uno de los matemáticos, se puede aplicar y ver esta sucesión, pues, como fue mencionado anteriormente, es una sucesión que tiene grandes aplicaciones en nuestra vida diaria y en lo que experimentamos y aprendemos, demostrando que, de alguna u otra manera, tuvo un gran aporte e influencia en los estudios realizados por estos matemáticos, que podían tener conocimiento o no de esta sucesión y sus propiedades y aplicaciones.

Para responder al segundo objetivo específico, que consistía en analizar los aportes de la sucesión de Fibonacci en la teoría de números y en la solución de problemas creativos, se estudiaron los conceptos de la sucesión de Fibonacci y la teoría de números, y se creó una serie de problemas creativos y sencillos para que un grupo de estudiantes contestaran. Se puede concluir que la sucesión de Fibonacci tiene un aporte evidente en la teoría de números, debido a que la base de los conceptos que esta estudia, como las propiedades de los números primos, los números perfectos, las congruencias, y el teorema de factorización única, son también las bases de esta sucesión, incluyendo los números enteros y la suma. Adicionalmente, ambos, los términos de la sucesión y las propiedades de la teoría de números, se pueden obtener de una manera sencilla, pero también se pueden utilizar expresiones (como la fórmula de Binet para hallar los términos de la sucesión) y números complejos para encontrar y estudiar estos, como fue mencionado y demostrado en el marco conceptual. Para concluir el aporte de la sucesión de Fibonacci en problemas creativos, se utilizó el tercer objetivo.

Finalmente, el tercer objetivo específico pretendía aplicar la sucesión de Fibonacci en la solución de problemas creativos y sencillos en las áreas STEM con los grados 9º y 10º del Colegio Marymount. Para llevarlo a cabo, se realizó un cuestionario a las alumnas de estos grados, en donde debían responder cinco problemas en relación a la sucesión de Fibonacci.

De aquí se puede concluir que las estudiantes lograron comprender gran parte de las preguntas y responderlas correctamente, arrojando resultados positivos. Es evidente que los conceptos básicos, propiedades y aplicaciones de la sucesión fueron entendidos, pues consiguieron utilizar algunas de estas bases que obtuvieron en la explicación a través del video para contestar acertadamente; sin embargo, cuando los problemas requerían un mayor nivel de análisis e interpretación, las estudiantes mostraron dificultades, debido a que se les puede complicar relacionar la sucesión con conceptos básicos de la matemática y el razonamiento lógico al momento de contestar, incluyendo encontrar el área de un rectángulo y el máximo común divisor entre dos números. Por esto, teniendo en cuenta la muestra estudiada, el conocimiento sobre la sucesión de Fibonacci ayuda a solucionar ejercicios básicos que requerían no solo los conceptos generales de esta sucesión, sino también la creatividad y el razonamiento lógico.

Referencias

Alonso, Á., & Bermúdez, T. (2002). EL DIABLO DE LOS NUMEROS. De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci. *LA GACETA DE LA RSME, 5.1*. Obtenido de LA GACETA DE LA RSME: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34465088/GACETARSME_2002_05_1_03.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DEL_DIABLO_DE_LOS_UMEROS_Seccion_a_cargo.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A%2F2

Apostol, T. M. (2002). *Introducción a la Teoría analítica de números.* (J. P. Carrera, Trad.) Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Baker, A. (1986). *Breve introducción a la teoría de números.* Madrid, España: Alianza Editorial, S.A.

Balibrea Gallego, F. (2005). *Ubicuidad de la sucesión de Fibonacci.* Obtenido de Dialnet: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1388851

Barberá Saiz, J. (2012). *Sistema de Afinación Musical de Proporciones Áurea.* Obtenido de UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/18491/Memoria.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Benavente, R. P. (14 de 10 de 2014). Treinta datos que no sabías sobre 'phi', el 'número más bello'. *El Confidencial*.

Berrio Escudero, S. (s.f.). *Aplicaciones De La Sucesión De Fibonacci.* Obtenido de Calameo: https://en.calameo.com/read/00530653664c84b3a4f25

Bulajich, R. (diciembre de 2006). Una sucesión y un número que han hecho historia. *Revista Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México*. Obtenido de Universidad Nacional Autónoma de México: http://revistas.unam.mx/index.php/cns/article/view/12070

Burton, D. M. (2002). *Elementary Number Theory* (Quinta edición ed.). Nueva York, Estados Unidos: McGraw Hill Education.

Cadavieco Castillo, M. J. (agosto de 2002). Pitágoras y los números perfectos. *Ingeniería. revista académica, 6*(2).

Canales, M., Martín, V., De Flores, R., Tejada, A., Fernández, C., Alonso, G., . . . Mora, R. (2019). *ΦBONACCIMIENTO: DESCUBRIENDO A FIBONACCI.* Obtenido de Colegio Buen pastor de Sevilla: https://www.cesur.org.es/imgrowlaber/wp-content/uploads/2019/12/5.-MATEM_Buen-Pastor_Fibonaccimiento_compressed.pdf

Casero Muñoz de Morales, V. J. (05 de junio de 2017). *La sucesión de Fibonacci. Ingeniería y belleza en la naturaleza.* Obtenido de ESCUELA BÍBLICA ESCRITURAS ONLINE: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53430029/MP430-Trabajo01-LaSucesionDeFibonacci.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DESCUELA_BIBLICA_ESCRITURAS_ONLINE.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53

Cordoba Muñoz, C. (2015). *LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y SU APLICACIÓN DIDÁCTICA EN LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.* Obtenido de CEU Universidad de San Pablo:

https://repositorioinstitucional.ceu.es/bitstream/10637/7456/1/Sucesion_CarlosCordobaMuñoz_TFM_2015.pdf

Cuaderno de Cultura Científica. (10 de abril de 2018). *COMPROBACIONES EXPERIMENTALES DE LA RELATIVIDAD GENERAL*. Obtenido de Laboratorium Bergara: http://www.laboratorium.eus/es/aggregator/%2AEMAIL_REMOVED%2Ahttp%3A/10.1001/---------------?page=82

Díaz Ramírez, S. (s.f.). *Razón Aurea.* Obtenido de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/fQHurUWy

Diccionario de la Real Academia Española. (2019). *Análisis*. Obtenido de Real Academia Española: https://dle.rae.es/análisis?m=form

Diez del Corral Zarandona, F. (2008). *Blaise Pascal: La certeza y la duda.* Madrid, España: Grupo Corporativo Visionnet. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=XGydqH0BXIYC&lpg=PA13&ots=K8SoselD4_&dq=blaise%20pascal%20biograf%C3%ADa&lr&hl=es&pg=PA405#v=onepage&q=blaise%20pascal&f=false

Docentes Educación Navarra. (s.f.). *Leonardo de Pisa (Fibonacci).* Obtenido de Docentes Educación Navarra: http://docentes.educacion.navarra.es/mpastorg/cd_alumno/modeloG/1bach_CSS/Datos/biografias/07.pdf

Docentes Educación Navarra. (s.f.). *Pierre de Fermat*. Obtenido de Docentes Educación Navarra: http://docentes.educacion.navarra.es/mpastorg/cd_alumno/modeloG/1bach_CSS/Datos/biografias/11.pdf

Duffour, G. A. (s.f). *El antiguo matemático indio Pingala.* Obtenido de Campus Estudio Jimdo: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjliJywqdDpAhXxc98KHcpeClQQFjAAegQIAhAB&url=https%3A%2F%2Fcampus-estudio.jimdo.com%2Fapp%2Fdownload%2F10439349924%2FSistemasdeNumeraci%25C3%25B3n.pdf%3Ft%3D1412158630&usg=AOvVaw2dzWo

Dundas, P. (2002). *The Jains.* Psychology Press.

Fry, H. (28 de octubre de 2018). *Las matemáticas... ¿nos las inventamos o las descubrimos? Un milenario debate sin resolver* . Obtenido de BBC: https://www.bbc.com/mundo/noticias-45955552

Galindo Tixaire, A., & López Pellicer, M. (2009). *LA OBRA DE EULER.* Obtenido de INSTITUTO DE ESPAÑA: http://teorica.fis.ucm.es/ft8/Euler.Bombal.pdf

García Martínez, P. (s.f.). *FIBONACCI Y LOS CONEJOS*. Obtenido de Departamento de matemáticas del IES Alameda de Osuna: https://sites.google.com/site/deptmatiesao/biografias/fibonacci

Gil Bor, C. (julio de 1998). *INTRODUCCION A LA TEORIA DE NUMEROS.* Obtenido de CIMAT: https://www.cimat.mx/~gil/ciencia_para_jovenes/tcj/1998/Teoria_de_Numeros/notas.pdf

González Zacarías, C., Palomino Ovando, M. A., & Cocoletzi, G. H. (junio de 2010). Los números de fibonacci en la naturaleza y los sistemas nanoestructurados artificiales. *Mundo Nano, 3*(1).

Gutiérrez G., J. J. (1 de abril de 2018). *Teoría de Números: De Ciencia pura a Ciencia aplicada.* Obtenido de Dialnet: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKE

wj5i5GDzNDpAhUxTt8KHcZCBcwQFjAAegQIBRAB&url=https%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F6447876.pdf&usg=AOvVaw1lMtj38gGB4QCvKJlZW37z

Hernández Del Toro, V. J. (marzo de 2011). *Aplicación del Algebra Lineal a la deducción de propiedades de la Sucesión de Fibonacci.* Obtenido de Universidad de Cartagena: http://repositorio.unicartagena.edu.co/bitstream/11227/9094/1/Trabajo%20de%20grado.PDF

Ibañéz, R. (18 de mayo de 2018). *La poética sucesión de Fibonacci.* Obtenido de Aprende a Pensar: https://aprenderapensar.net/2018/05/18/la-poetica-sucesion-de-fibonacci/

Johnson, T., & Allouche, J.-P. (s.f.). *Narayana's Cows and Delayed Morphisms*. Obtenido de Kalvos: http://kalvos.org/johness1.html

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (Vol. 51). (Wiley, Ed.)

León Cardenal, E. (2006). *LA LEY DE RECIPROCIDAD CUADRATICA. UNA BREVE REVISIÓN HISTÓRICA.* Obtenido de Universidad de los Andes: http://funes.uniandes.edu.co/9016/

LeVeque, W. J. (1968). *Teoría elemental de los números.* (C. E. Cervantes de Gotari, Trad.) México: Centro regional de ayuda técnica. Agencia para el desarrollo institucional (A.I.D).

Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Argentina: Libros de Zorzal. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=F7qoJPsnJ_EC&lpg=PA7&ots=dgD8SFXSgE&dq=euclides&lr&hl=es&pg=PA9#v=onepage&q=euclides&f=false

Martínez, C. (1 de agosto de 2018). ¿Qué es la sucesión de Fibonacci?, la fórmula matemática que está presente en la naturaleza. *Vanguardia Mx*.

Martínez, L. H., Salas S., Á., & Fernández S., O. (2009). COEFICIENTES POLINOMIALES PARA FUNCIONES LÍMITE DE SERIES DE POTENCIAS, UNA ANALOGÍA CON EL TRIANGULO DE PASCAL. *Scientia Et Technica, XV(43)*, 285-287.

Miller, C. D., Heeren, V. E., & Hornsby, J. (2005). *Matemática: razonamiento y aplicaciones* (Décima edición ed.). (V. H. Ibarra Mercado, Trad.) Pearson Educación.

Minnaard, C., & Condesse, V. (25 de diciembre de 2005). La sucesión de Fibonacci en los distintos campos conceptuales. *Revista Ibero-Americana de educación*. Obtenido de https://digital.cic.gba.gob.ar/bitstream/handle/11746/4906/11746_4906.pdf-PDFA.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Monier-Williams , M. (s.f.). *Sanskrit-English Dictionary.* Obtenido de Sanskrit-English Dictionary: https://www.sanskrit-lexicon.uni-koeln.de/cgi-bin/monier/serveimg.pl?file=/scans/MWScan/MWScanjpg/mw1304-hetumAtratA.jpg

Moreno Castillo, R. (2004). *Fibonacci. El primer matemático medieval* (1ª edición ed.). España: Nivola libros y ediciones, S.L.

Niven, I., & Zuckerman, H. S. (1969). *Introducción a la teoría de los números.* (J. H. Perez Castellanos, Trad.) México: Editorial Limusa-Wiley, S.A.

Orendain López Vergara, L. T., Calvillo Hernández, M., & Leyva Garía, M. (s.f.). *El Número Áureo. La Fórmula Divina de Fibonacci.* Obtenido de Centro Universitario Anglo Mexicano: http://www.acmor.org.mx/cuam/2009/Fisico-Mate/108-CUAM%20Mor-Numero%20aureo.pdf

Parra León, M., Granier D, M., & Kerdel Vegas, F. (1971). *BOLETIN DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS FISICAS MATEMATICAS Y NATURALES.* Obtenido de REPUBLICA DE VENEZUELA: https://acfiman.org/wp-content/uploads/2019/04/Cuarto-93.pdf#page=56

Prieto de Castro, C. (18 de octubre de 2013). *Los números primos - hechos y conjeturas.* Obtenido de Universidad Nacional Autónoma de México: https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/phocadownloadpap/presentaciones/p.pdf

Prieto de Castro, C. (s.f.). *Fibonacci, Leonardo da Pisa.* Obtenido de Instituto de matemáticas UNAM: https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-f-j/200-fibonacci-leonardo-da-pisa

Rojas González, R. (mayo de 2017). *El número de Euler y el interés compuesto.* Obtenido de Universitarios Potosinos: http://www.uaslp.mx/Comunicacion-Social/Documents/Divulgacion/Revista/Catorce/211/07.pdf

Rondero Guerrero, C., Campos Nava, M., Torres Rodríguez, A. A., & Acosta Hernández, J. A. (febero de 2018). Un Acercamiento A La Relación Pitagórica A Través Del Cálculo De Ternas. *European Scientific Journal, 14*(6). Obtenido de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/56033993/6.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DUn_Acercamiento_A_La_Relacion_Pitagorica.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=ASIATUSBJ6BAA53V6RM4%2F20200526%2Fus-east-1%2

Singh, P. (1985). *The So-Called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India.* Obtenido de Science Direct: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086085900217

Strathern, P. (1997). *Pitágoras y su teorema en 90 minutos.* Madrid, España: España Editores S.A. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=MDK9AwAAQBAJ&lpg=PT3&ots=CVb41fJ2Ac&dq=pit%C3%A1goras&lr&hl=es&pg=PT3#v=onepage&q=pit%C3%A1goras&f=false

Tetlow, P. D. (2007). *The Web's Awake: An Introduction to the Field of Web Science and the Concept of Web Life.* (Wiley, Ed.)

Ugarte Fernández, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci.* (Lulu.com, Ed.)

Viana Martínez, V. (s.f.). *Vviana.* Obtenido de La sorprendente sucesión de Fibonacci: http://vviana.es/doc/LaSorprendente%20SucesionDeFibonacci.pdf

Viggiani Rocha, M. I. (s.f.). *La sucesión de Fibonacci.* Obtenido de Universidad Nacional de Tucumán: https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/FibonacciFinal2.pdf

WikiZero. (n.d.). *Gottfried Wilhelm Leibniz* . Obtenido de WikiZero: https://www.wikizero.com/en/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

Bibliografía

Bravo, S. (1994). *Técnicas de Investigación social.* Paraninfo. Madrid, España

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid, España: La Muralla.

Fernández, J., Pérez, C. & Rojas, A. (1998). *Elaboración del cuestionario. Investigar mediante encuestas.* Fundamentos teóricos y aspectos prácticos. Editorial Síntesis. Madrid, España.

Ferrando, J. Ibáñez y F. Alvira (Comp.), El análisis de la realidad social. Métodos y técnicas de investigación (pp. 123-152). Madrid, España: Alianza Universidad.

García, M. (1993). *La encuesta. El análisis de la realidad social.* Universidad Textos. Madrid, España.

Ibarra, C. (2010). *Ser de maestro en Colombia: De oficio a profesión*. Bogotá: Universidad Pedagógica de Nacional.

León, O. G. y Montero, I. (2004). Métodos de investigación en psicología y educación (3ª ed.). Madrid, España: McGraw-Hill.

Moser, C. y Kalton, G. (1977). Social methods in social investigation. Londres. Reino Unido: Heinemann.

Pulido, A. (1971). Estadística y técnicas de investigación social. Salamanca, España: Anaya.

Selltiz, C., Wrigtsman, L. S. y Cook, S. W. (1980). Métodos de investigación en las relaciones sociales. Madrid, España: Rialp.

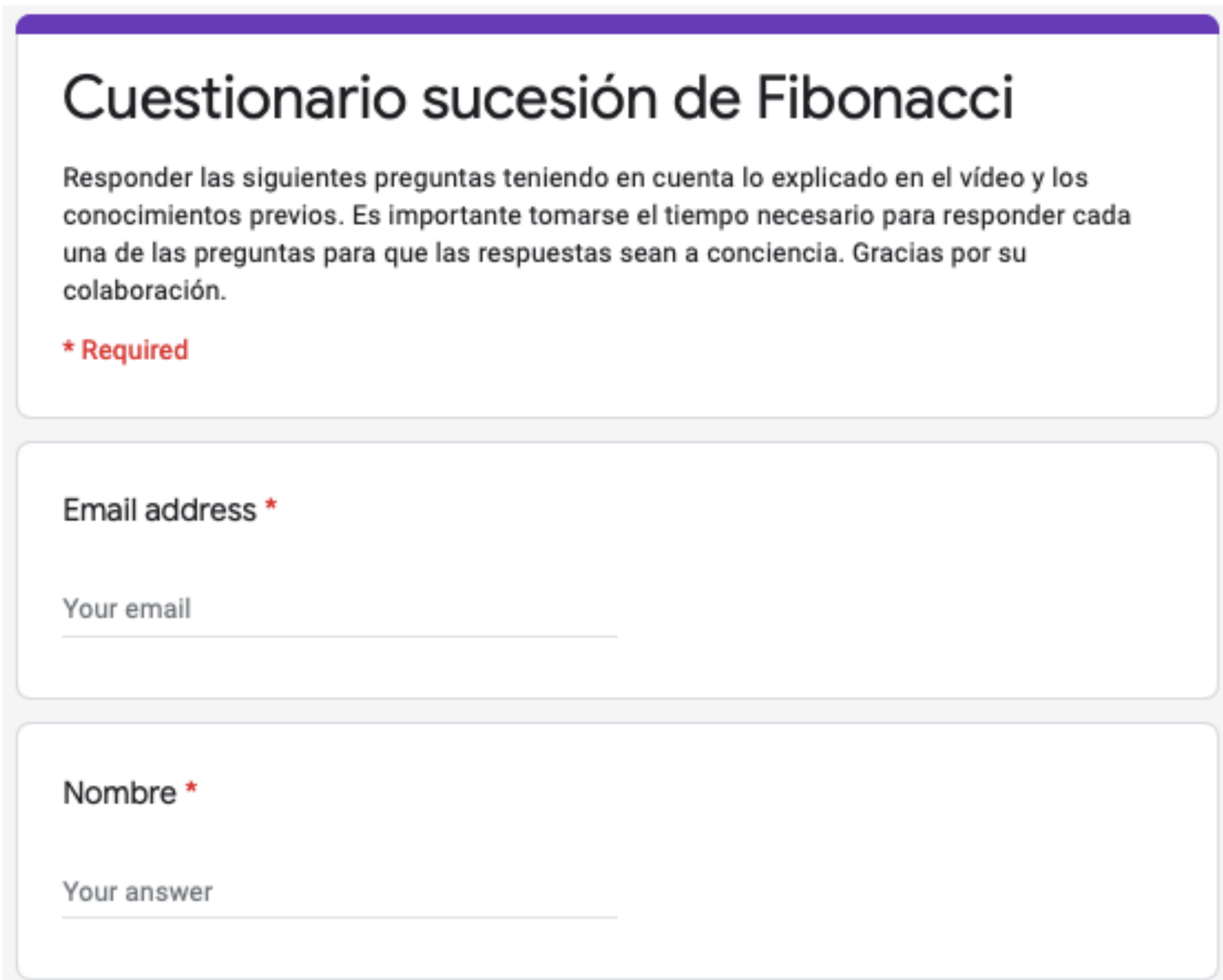
Anexos

Anexo 1. Enlace video

Enlace del video presentado a las estudiantes de noveno y décimo grado antes de responder el cuestionario.

https://www.powtoon.com/c/d5XLtd8owCF/1/m

Anexo 2. Formato del cuestionario.



Cuestionario sucesión de Fibonacci

Responder las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo explicado en el vídeo y los conocimientos previos. Es importante tomarse el tiempo necesario para responder cada una de las preguntas para que las respuestas sean a conciencia. Gracias por su colaboración.

* Required

Email address *

Your email

Nombre *

Your answer

Grado *

- 9ºA
- 9ºB
- 9ºC
- 10ºA
- 10ºB

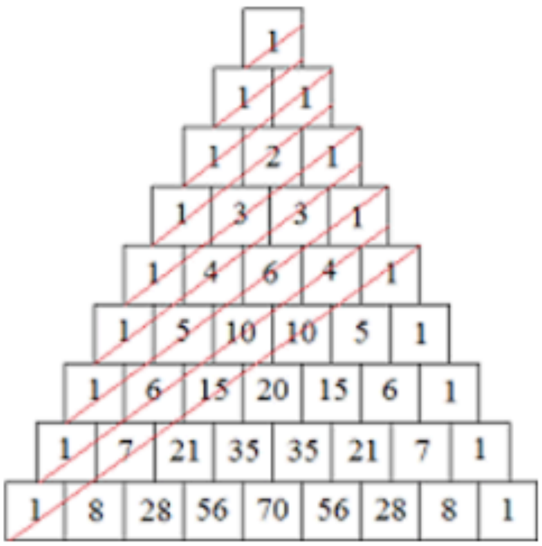
Calcular el duodécimo (12º) término de la sucesión de Fibonacci. *

- 89
- 144
- 233
- 125

La sucesión de Fibonacci, ¿Es una sucesión creciente, decreciente, o alternada? *

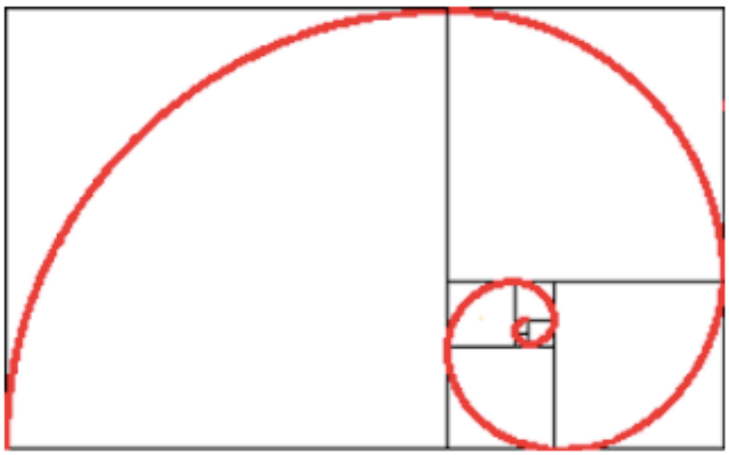
- Creciente
- Decreciente
- Alternada

En la siguiente figura, se han dibujado en rojo las diagonales del triángulo de Pascal con 9 filas. ¿Cuánto suman los números de cada diagonal? (de arriba hacia abajo) *



- 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34
- 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

¿Cuánto mide el área total de la espiral de Fibonacci mostrada? (tener en cuenta que hay 9 cuadrados en la figura) *



- 1870
- 714
- 1836
- 693

Utilizando la siguiente propiedad, calcular el MCD (máximo común divisor) del cuarto y octavo término de la sucesión de Fibonacci. *

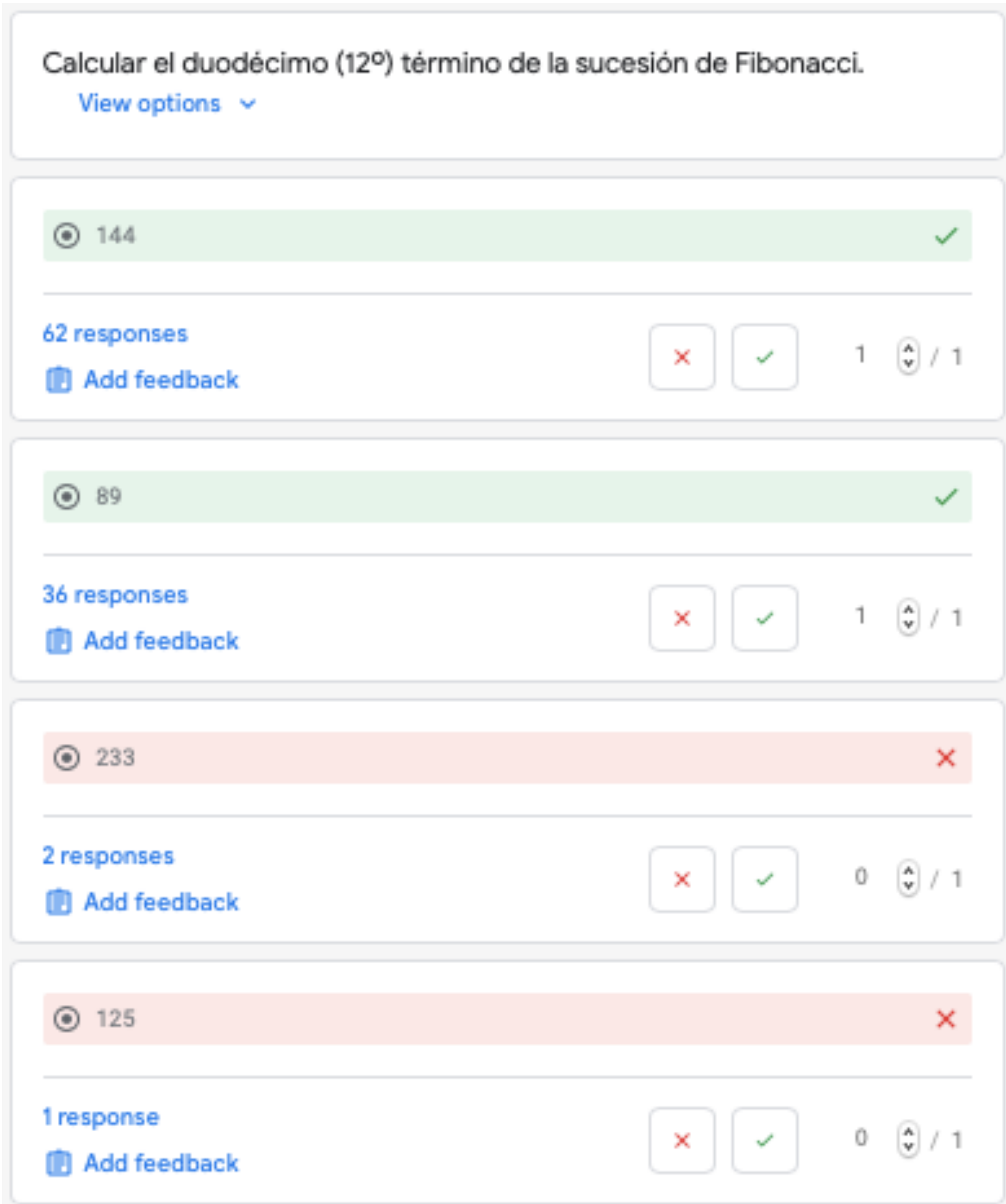
Propiedad:
El máximo común divisor de los números de Fibonacci que ocupan las posiciones *n* y *m* coincide con el término cuya posición es el máximo común divisor de *n* y *m*.

$$MCD(a_n, a_m) = a_{MCD(n,m)}$$

- 3 (posición 4)
- 4 (posición 3)
- 5 (posición 4)
- 2 (posición 3)

Submit

Anexo 3. Resultados cuestionario.


Calcular el duodécimo (12º) término de la sucesión de Fibonacci.

View options

144

62 responses

Add feedback

1 / 1

89

36 responses

Add feedback

1 / 1

233

2 responses

Add feedback

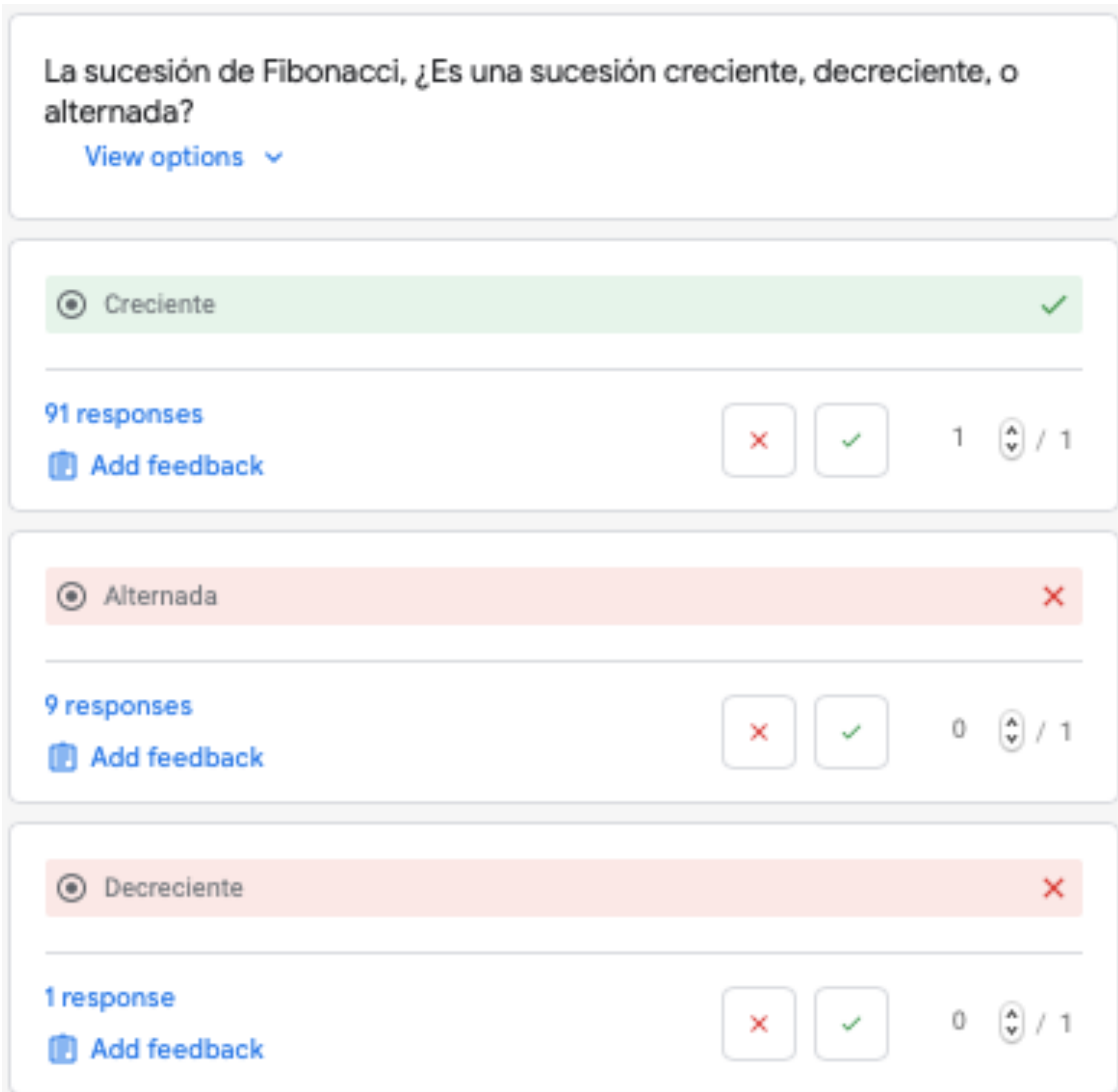
0 / 1

125

1 response

Add feedback

0 / 1


La sucesión de Fibonacci, ¿Es una sucesión creciente, decreciente, o alternada?
View options
Creciente
91 responses
Add feedback
1 / 1
Alternada
9 responses
Add feedback
0 / 1
Decreciente
1 response
Add feedback
0 / 1

En la siguiente figura, se han dibujado en rojo las diagonales del triángulo de Pascal con 9 filas. ¿Cuánto suman los números de cada diagonal? (de arriba hacia abajo)

View options

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

82 responses

Add feedback

1 / 1

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

11 responses

Add feedback

0 / 1

1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

5 responses

Add feedback

0 / 1

1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34

3 responses

Add feedback

0 / 1

¿Cuánto mide el área total de la espiral de Fibonacci mostrada? (tener en cuenta que hay 9 cuadrados en la figura)

View options

1870 ✓

47 responses

Add feedback

1 / 1

714 ✗

26 responses

Add feedback

0 / 1

1836 ✗

20 responses

Add feedback

0 / 1

693 ✗

8 responses

Add feedback

0 / 1

Utilizando la siguiente propiedad, calcular el MCD (máximo común divisor) del cuarto y octavo término de la sucesión de Fibonacci.

View options

3 (posición 4) ✓

48 responses

Add feedback

1 / 1

4 (posición 3) ✕

29 responses

Add feedback

0 / 1

5 (posición 4) ✕

12 responses

Add feedback

0 / 1

2 (posición 3) ✕

12 responses

Add feedback

0 / 1